Économétrie
des Marchés Financiers
-
VaR
Valeurs Extrêmes

- **Risque de marché :**
  - **C'est l'exposition d'un portefeuille due aux mouvements et aux changements des facteurs du marché : taux d'intérêt, cours des actions, taux de change…**
- **Risque de crédit :**
  - **Exposition au risque qu'une contrepartie fasse défaut à ses engagements : payer la dette d'un créancier, ou les coupons d'une obligation émise, restructuration de la dette.**
- **Risque de liquidité:**
  - **C'est le risque lié à la détention d'un actif peu liquide, ce qui ne permet plus de faire une couverture aux prix du marché, et nécessite une durée beaucoup plus grande pour la liquidation des positions. C'est le cas particulièrement pour le marché des OTC.**
- **Risque de modèle :**
  - **Les pertes dues à l'utilisation d'un modèle erroné, ou pas assez précis pour le pricing, et la gestion du risque.**
- **Risque Opérationnel:**
  - **Cela comprend un grand nombre de sources de risque, allant de la fraude au risque technologique, au risque lié au changement de législature entre les différentes filières d'une banque dans plusieurs pays. En raison de la diversité et la disparité de ces sources, le risque opérationnel est très difficile à quantifier.**

Source: ENSAE

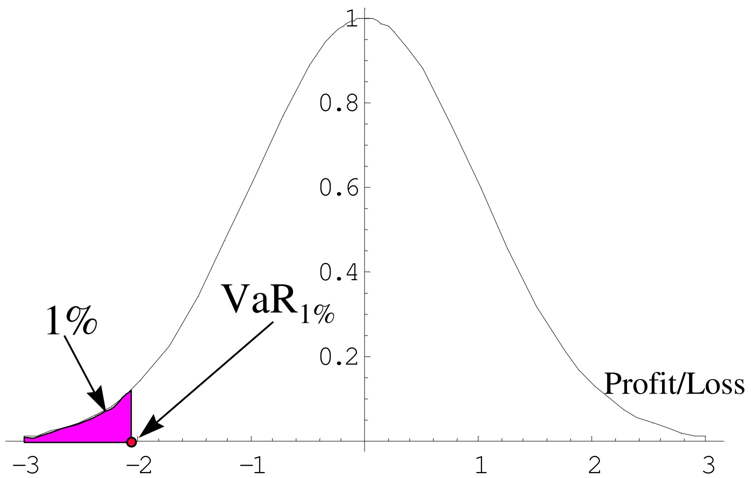
Everything

correct, but useless answer.

How much can we lose realistically?

- **VaR is defined as the predicted worst-case loss at a specific confidence level (e.g. 99%) over a certain period of time.**

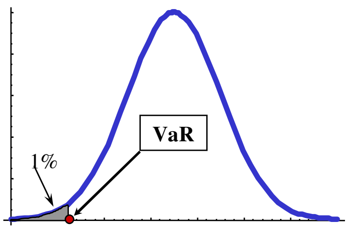
- **VaR is the worst loss over a target horizon with a given level of confidence (Jorion definition)**



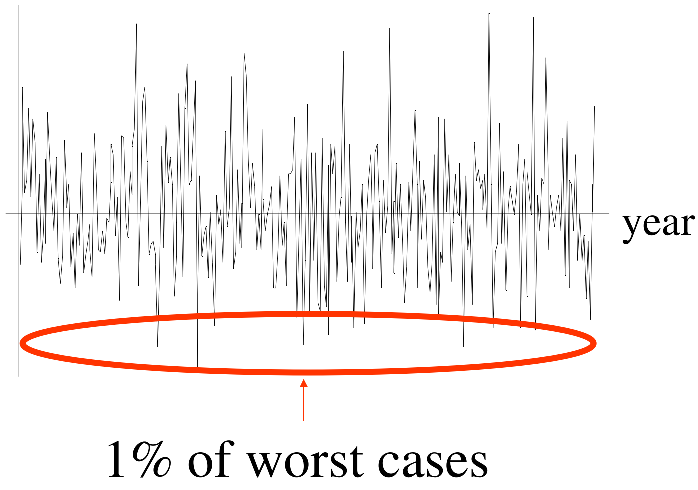
A portfolio manager has a daily VaR equal $1M at 99% confidence level.

This means that there is only one chance in 100 that a daily loss bigger than $1M occurs,

under normal market conditions.



Returns



Mesures du risque

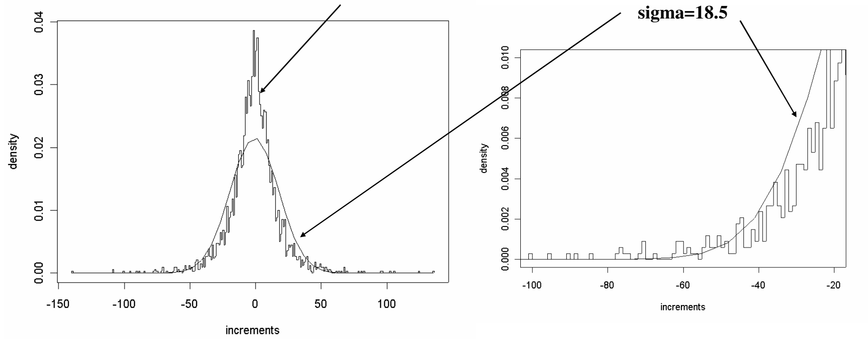
- **Volatilité**
  - **ne prend pas suffisamment en compte les pertes réelles le cas de queus épaisses**
- **Value at Risk: perte potentielle maximale pour une probabilité fixée sur une période donnée.**
- **Autres:**
  - **Value at Risk Conditionnelle (CVaR)** $ES_k = CVaR_k^+ = VaR_k + E\left[f(x,y) - VaR_k / f(x,y) > VaR_k\right]$
    - **plus pertinent: car tient compte des pertes en cas de dépassement de la VaR**
    - **plus cohérent (avec l'otpimisation de Markowtiz dans le cas gaussien)**
    - **plus facile à calculer (programmation linéaire)**
  - **Semi Variance**
  - **Perte Maximale Historique (Drawdown)**
    - **CDAR: équivalent du CVaR pour le drawdown.**

- VaR = Value at Risk =perte potentielle maximale pour une probabilité fixée sur une période donnée.
  - Exemple si VaR(95%,10jours)=1 Million €,
    la perte maximale sera inférieure à 1 Million €, avec une probabilité de 95%
  - VaR = quantile
- Très utilisé, car
  - rend bien compte de la notion de risque, y compris et surtout extrêmes
  - facile à comprendre …
  - devient réglementaire :
- Bâle (1995)
  - VaR 1 %, à 10 jours, sur historique de 1 an au moins.
  - Besoin en capital = Max [VaR(jour-1), 3*MA(VaR,6jours)]
  - Mesure sévère …

- L'estimation de la VaR est directement liée à l'estimation des queues de distribution, évènements rares et valeurs extrêmes
- Un double défi :
  - manque de données: comment estimer des probabilités d'événements qui ne sont que très rarement observés ?
  - dont on ne connaît pas la loi de distribution
- Méthodes:
  - VaR historique : quantile de l'échantillon
    - encore faut il avoir suffisamment de données ….
  - Modélisations/Estimation paramétriques
    - VaR normale, pb: ne tient pas compte des queues épaisses
    - distributions à queues épaisses: t-student, exponentielle, hyperbolique, …
  - Modélisations/Estimation non paramétriques
    - estimation des exposants de queues
    - Approximations (Cornish Fisher): mieux que la VaR normale, mais pb de validité de l'approximation
    - Théorie des valeurs extrêmes (Frechet, Gumbel, Weibull, Pareto Généralisé, …)

Exemple Intraday Future CAC40: estimation des queues de distribution

Histogramme des incréments de 1 heure sur 500 jours de cotations **Gaussienne sigma=18.5**



pic au centre + queues épaisses

= Distribution leptokurtique

Var 1 heure	90%	95%	99%	99.90%	99.99%
Normale	23.7	30.5	43.1	57.2	68.5
Historique	21.0	29.5	53.0	98.0	129.0
hist/normal	0.9	1.0	1.2	1.7	1.9 divergence

Remarques: 1. Le terme de VaR est employé de manière abusive s'agissant d'une simple estimation des queues de distribution

2 on travaille en incréments et points de base, et non pas en %, car plus adapté au trading sur futures.Finalement assez peu de différence entre incréments et incréments des log (à cette échelle de temps)

VaR dans l'approximation gausienne

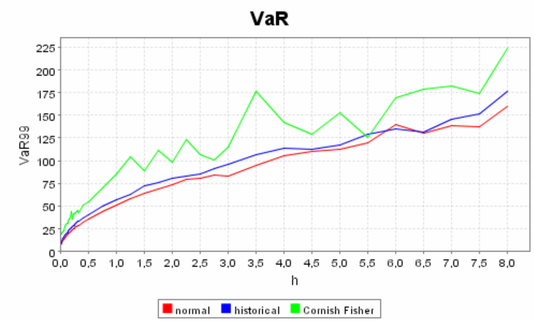
cas normal/gaussien $VaR(1-\alpha;T) = W(\mu - z_c\sigma)\sqrt{T}$ avec $N(z_c) = 1-\alpha$, N étant la fonction de distribution d'une gaussienne centrée réduite.

W= vaqleur du portefeuille
mu = espérance rendement
sigma= volatilité
z_c = quantile gaussien centrée réduite

```
> qnorm(0,05)
[1] -Inf
> qnorm(0.05)
[1] -1.644854
> qnorm(0.01)
[1] -2.326348
> qnorm(0.001)
[1] -3.090232
> qnorm(0.0001)
[1] -3.719016
>
```

Exemple: VaR contrat CAC40 Future

Etude de la VaR Intraday pour différents intervalles de temps de qqes secondes à 8 heures.



VaR CAC40 Future sur 600 jours de cotations
du 24/8/99 au 2/1/2002, entre 8h et 22h
nombre de ticks=7 500 00

historicalVaR99(t) = 1,15 $t^{0,48}$
ln(historicalVAR99)=0,14 + 0,48*ln(seconds) R2=1,00

sigma(t) = 0,39 $t^{0,50}$
ln(sigma)=-0,95 + 0,50*ln(seconds) R2=1,00

cas normal/gaussien $VaR(1-\alpha;T) = W(\mu - z_c\sigma)\sqrt{T}$ avec $N(z_c) = 1-\alpha$, N étant la fonction de distribution d'une gaussienne centrée réduite.

Approximation de Cornish Fisher

$$z = z_c + \frac{1}{6}(z_c^2 - 1)S + \frac{1}{24n}(z_c^3 - 3z_c)K - \frac{1}{36n}(2z_c^3 - 5z_c)S^2$$

VaR Historique = quantile échantillon

Exposant de queue de distribution

- **On s'intéresse ici aux évènements rares: du type krach de 1987, qui se produit une fois tous les 40 ans ! Soit 1/10 000 jours**
- **Exemple : estimer la VaR pour des évènements qui se produisent avec une probabilité de l'ordre de 1/10000**
- **Les queues de distribution se comportent comme une loi puissance:**
- **Plus α est petit et plus la queue est épaisse, α est appelé l'exposant de queue**
- **Les moments d'ordres k : $E[x^k]$**
  - **ne sont définis que si $k-\alpha-1<-1$, c'est a dire pour $k < \alpha$,**
  - **les moments d'ordre $k >= \alpha$ sont infinis:**
  - **si α < 4 la kurtosis est infinie**
  - **si α < 2 la variance est infinie**
  - **si α < 1 la moyenne est infinie**

$$P(X>x)=1-F(x) \sim C\, x^{-\alpha}$$

Estimateur de Hill

- Pour une distribution à queue épaisse: $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} l(x)$
- Fonction Quantile :

$$Q(1-p) = p^{-\gamma} l^{*}(1/p)$$

$$\Rightarrow \log Q(1-p) = -\gamma \log(p) + \log l^{*}(1/p)$$

- statistiques ordonnées of $X_1, X_2, \ldots, X_n$: $X_1^* \leq X_2^* \leq \ldots \leq X_n^*$

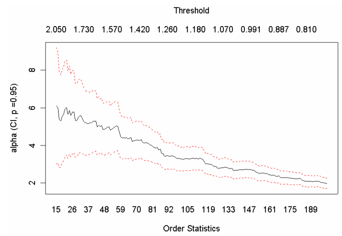
X_{n-j+1}^* est un estimateur de la fonction quantile $Q(1-j/(n+1))$

Estimateur de Hill = Régression

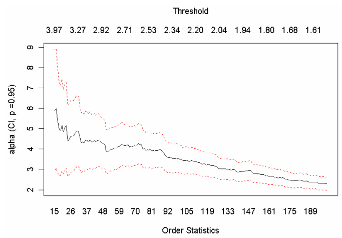
$$\log(X_{n-j+1}^*) \text{ vs. } -\log\left(\frac{j}{n+1}\right) \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{droite de régression} \\ \text{de coef } \gamma \end{array} \right.$$

Exposants de queue: lois connues

Loi normale
exposant de queue = ∞



Loi exponentielle:
exposant de queue = ∞

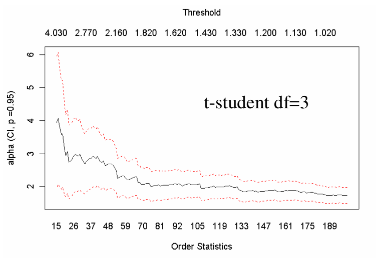


Exposants de queue: lois connues (suite)

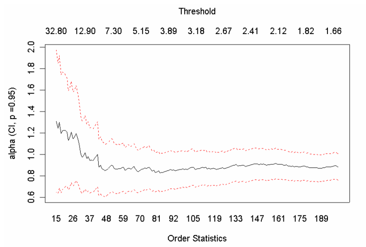
Loi de t-student:
exposant de queue = degré de liberté

$$f_\alpha(x) \sim \left(1+\frac{x^2}{\alpha}\right)^{-\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}$$

$$\bar{F}_\alpha(x) \sim \alpha^{(\alpha-1)/2} x^{-\alpha}$$



Cauchy
exposant de queue = 1



Pareto:

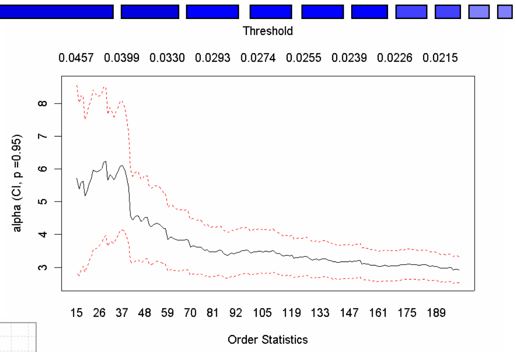
$$\bar{F}_\alpha(x) = x^{-\alpha}$$

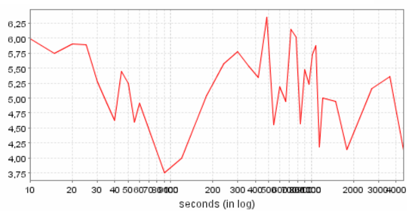
Daniel HERLEMONT 17

Exposant de queue CAC40 Journalier et Future Intraday

L'exposant de queue est de l'ordre de 3.5 en journalier

```
hill(r,end=200)
```





CAC40 Future intraday 2 ans (2002/2003)

Estimateur de Hill α ~ 3 à 6

$\mu=1/\alpha$ ~ 0.15 à 0.3

dépend de la période en cours de journée

Qu'il s'agisse d'intraday ou journalier l'exposant est à peu près le même:
de l'ordre de 3

A noter une grande imprécision sur les mesures de l'exposant: on ne peut pas espérer mieux qu'un chiffre significatif !
caractéristique commune à toutes les méthodes d'estimation

Daniel HERLEMONT 18

Théorème des Valeurs Extrêmes

Théorème des Valeurs Extrêmes:

l'équivalent du Théorème de la Limite Centrale pour les queues de distribution

$$M_n = max(X_1, X_2, ..., X_n)$$

Il existe μ, σ, ξ tels que le (Mn- μ)/σ converge vers

$$H(x) = H_\zeta\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$H\zeta(x) = \begin{cases} \exp(-(1+\zeta x)^{-1/\zeta}) & \zeta \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}) & \zeta = 0 \end{cases}$$

ξ=0 Weibull
ξ>0 Frechet
ξ<0 Gumbel

estimation par méthode de block maxima et maximum de vraisemblance
suppose un historique important et échantillon iid

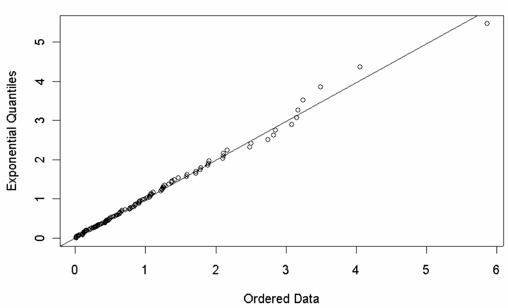
Les actifs financiers sont dans la classe de Frechet ξ>0,
avec ξ entre 0.2 et 0.5, soit un exposant de queue entre 2 et 5

Daniel HERLEMONT 19

Estimation GEV CAC40

```
gev(rcac,30)
...
$par.ests
        xi       sigma          mu
0.201967371 0.007503988 0.021030319
$par.ses
         xi        sigma           mu
0.0790051941 0.0005529772 0.0007857595
...
```

Donc un exposant de queue de l'ordre de 5



Daniel HERLEMONT 20

Estimation GEV Intraday CAC40

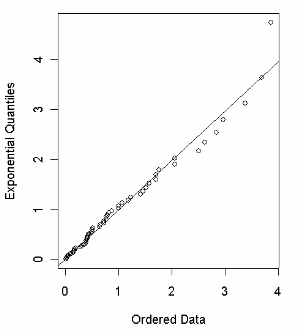
Échantillon: sur 500 jours, fin = 30/9/2003, de 10h00 à 17h30, n ticks > 8 millions
incréments = 1 heure

Estimation du modèle GEV (Generalized Extreme Value)

$$G(z) = \exp\left\{-\left[1+\xi\left(z-\mu\right)/\sigma\right]_+^{-1/\xi}\right\}$$

incréments prix

ξ	σ	μ
0.23	15	35



Daniel HERLEMONT

Distribution de Pareto Généralisée - GPD

On s'intéresse à la distribution des pertes au delà d'un certain seuil u: $F_u(y) = P\left\{X - u \le y \mid X > u\right\},$

Pour les distributions vérifiant le théorème des valeurs extrêmes et pour un seuil u suffisamment grand, Il existe ξ, β tel que Fu converge vers la distribution de Pareto Généralisée

$$F_u(y) = G_{\xi,\beta}(y).$$

$$\boxed{G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1-(1+\xi x/\beta)^{-1/\xi} & \xi \neq 0, \\ 1-\exp(-x/\beta) & \xi = 0, \end{cases}}$$

Si n est le nombre total de l'échantillon et Nu le nombre de valeurs dépassant u ,alors

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n}\left(1+\hat{\xi}\frac{x-u}{\hat{\beta}}\right)^{-1/\hat{\xi}}$$

$$\boxed{\widehat{\mathrm{VaR}}_q = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-q)\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right)}$$

On peut aussi estimer l'espérance de la perte en cas de dépassement de la VaR (Expected Shortfall)

$$\mathrm{ES}_q = \mathrm{VaR}_q + E[X - \mathrm{VaR}_q \mid X > \mathrm{VaR}_q],$$

$$\frac{\mathrm{ES}_q}{\mathrm{VaR}_q} = \frac{1}{1-\xi} + \frac{\beta - \xi u}{(1-\xi)\mathrm{VaR}_q}.$$

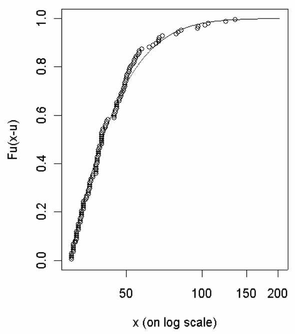
Daniel HERLEMONT

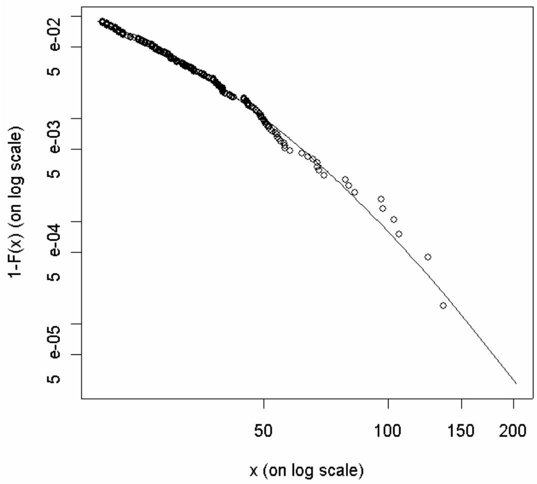
GPD fit

Échantillon: sur 500 jours,
fin = 30/9/2003,
de 10h00 à 17h30,
n ticks > 8 millions
incréments = 1 heure

u=20, n=3388, Nu=303
ξ= 0.144 ± 0.06
β= 11.7 ± 1.

Excellent fit …





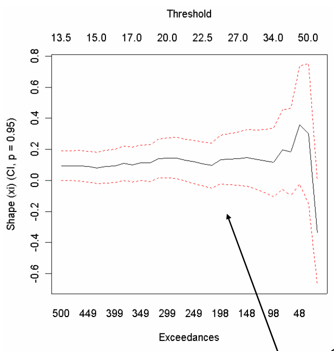
Estimation du seuil pour Pareto Généralisé

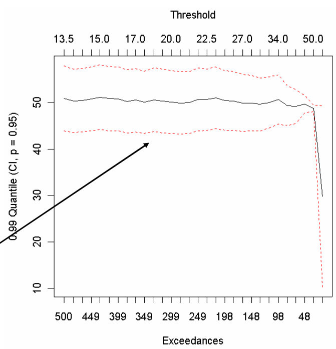
Détermination du seuil u: compromis entre un seuil élevé et signification de l'estimation:

Estimation du paramètre de forme (ξ) et Var en fonction du seuil
montre une excellente stabilité du résultat dans les zones -/-3 sigma

ξ ~ 1.5

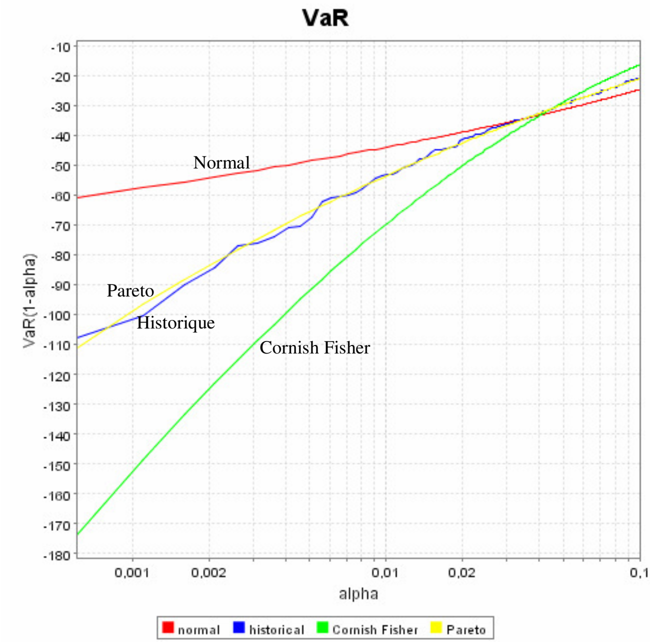
VaR(99%,1h;GPD) ~ 50





Intervalle de confiance : il n'est pas possible d'obtenir de très grandes précisions pour le paramètre de forme (xi)
L'intervalle de confiance dans l'estimation GPD est obtenu par la méthode de "Profile Likelihood"

VaR exemple avec GPD



Daniel HERLEMONT 25

Backtesting

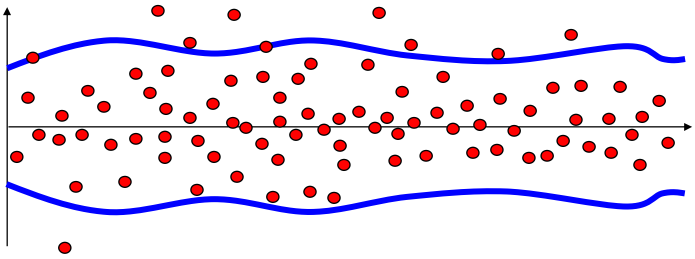
- Verification of Risk Management models.
- Comparison if the model's forecast VaR with the actual outcome - P&L.
- Exception occurs when actual loss exceeds VaR.

Daniel HERLEMONT 26

Backtesting

- Green zone - up to 4 exceptions
- Yellow zone - 5-9 exceptions
- Red zone - 10 exceptions or more

- OK
- increasing k
- intervention



Probability of Multiple Exceptions

- Each period the probability of exception is 1%, then after 250 business days the probability that there will be 0 exceptions is

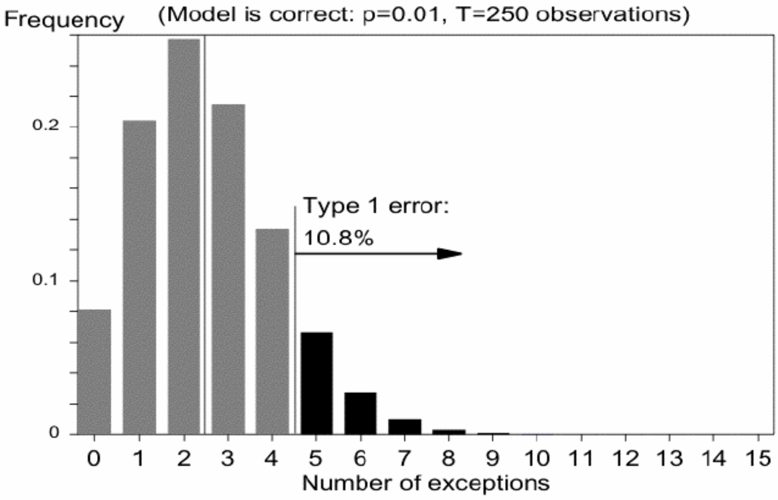
$$\frac{250!}{0! \cdot 250!} 0.01^0 \cdot 0.99^{250} = 0.081$$

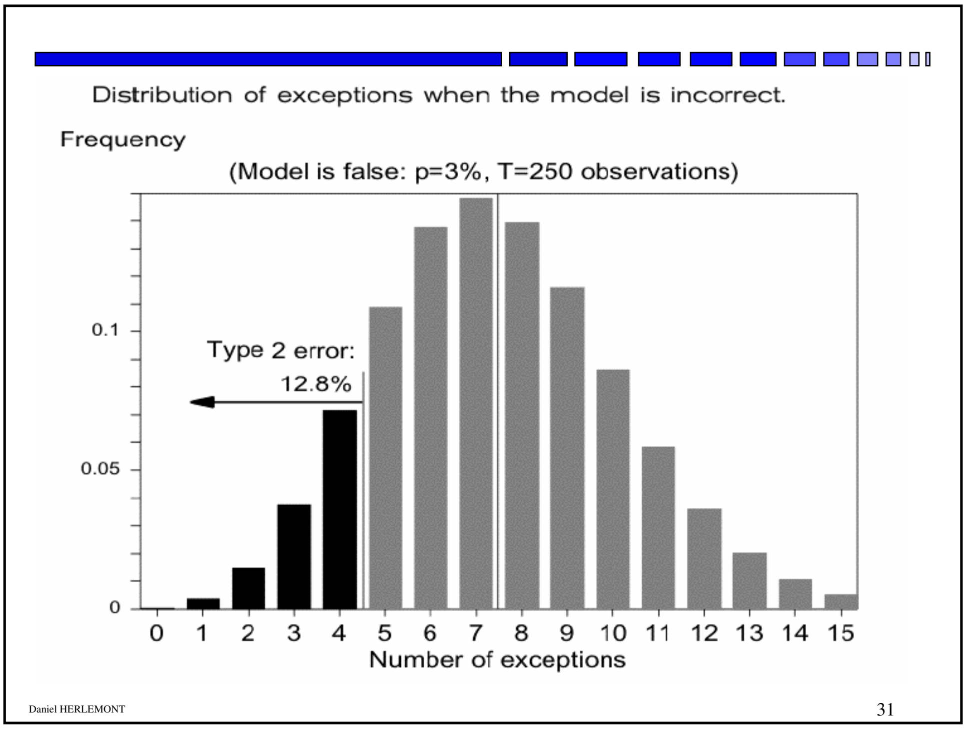
- General formula of binomial distribution is

$$\frac{n!}{x! \cdot (n-x)!} p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

	Model	
Decision:	**Correct**	**Incorrect**
Accept	OK	Type 2 error
Reject	Type 1 error	OK

Distribution of exceptions when the model is correct.




Distribution of exceptions when the model is incorrect.
Frequency
(Model is false: p=3%, T=250 observations)
0.1
0.05
0
Type 2 error:
12.8%
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
Number of exceptions
Daniel HERLEMONT
31