



Économétrie des Marchés Financiers

-

Projet Phase II

-

Pairs Trading

Daniel HERLEMONT

1



La Stratégie

- **Stratégie Marché Neutre long/short sur les actions**

- **Les principes:**

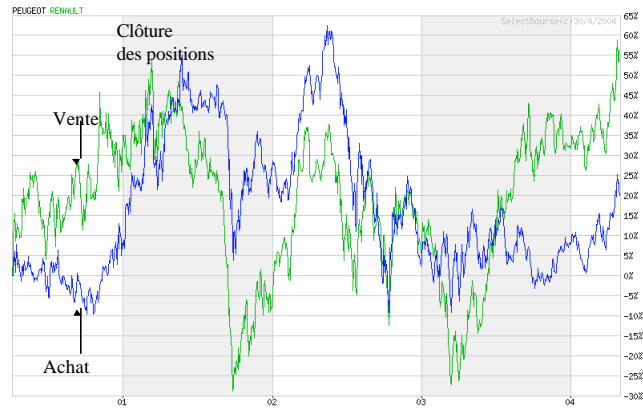
- ☞ **Rechercher deux actions de même caractéristiques:**
 - ↳ même secteur
 - ↳ et/ou capitalisation comparables
 - ↳ en résumé, et/ou exposé aux mêmes facteurs de risques (secteur, pays, capitalisation, taux, devise, ...)
- ☞ **basé sur l'étude des rapports des prix entre les deux actions**
 $R = P1/P2$ ou $\log(R) = \log(P1) - \log(P2)$
- ☞ **R doit être "stationnaire" et présenter des cycles avec des "retours à la moyenne" => Test de co-intégration (Dickey Fuller, ...), la corrélation des rendements n'est pas le facteur essentiel.**
- ☞ **Stratégie:**
 - ↳ Investir en position long/short lorsque le ratio des prix est suffisamment éloigné de sa moyenne mobile
 - ↳ Clôturer la position lorsque le ratio revient sur sa moyenne mobile
- ☞ **Indifférent à la hausse ou à la baisse des actions: ce qui compte ce sont les écart de prix.**

Daniel HERLEMONT

2

Exemple Peugeot vs Renault

Trading du spread Peugeot vs Renault



Daniel HERLEMONT

3

Risques

- **Benchmark: comparer au taux sans risque**
- **Risques**
 - ☞ Risques systémique (marché, secteur) : si les betas différent fortement
 - ☞ Risques spécifiques de l'actif
 - ☞ Le retour à la moyenne est plus long que prévu (cf. LCTM)
 - ☞ Si les spread sont faibles on peut être amené à prendre des leviers trop grands => risque des leviers: cf phase I !
- **Gestion du risque:**
 - ☞ Stop loss (ex: ~ -20% de la valeur de la position)
 - ☞ Spread beta (ex: < 0.2)
 - ☞ Time out = durée maximale de détention (exemple < 50 jours)
 - ☞ Diversification
- **En pratique:**
 - ☞ La sélection des paires est délicate, doit être basée sur des fondamentaux (BNPA), l'étude des séries temporelles venant le plus souvent en confirmation.

Daniel HERLEMONT

4

- Étude portant sur les actions composants le DJI
 - ☞ soit 30 actions + l'indices DJI

- Étude des paires
 - ☞ Pour chaque actions, étudier les beta (cf TP régressions)
 - ☞ Pour chaque paire (i,j) : soit 1560 paires !
 - ☞ on pourra se limiter à quelques secteurs (bancaires, auto, ...)
 - ☞ étudier la série $\log(S_i) - \log(S_j)$
 - ☞ effectuer des test de Dickey Fuller
 - ☞ Identification des paramètre du modèle AR(1).
 - ☞ Choisir une paires, en fonction des critères de retour à la moyenne, des risques sur les beta, ...

- Élaborer une stratégie de trading et une gestion du risque d'un portefeuille composé de la paire sélectionnée et de l'actif sans risque

- Conclusions

- Certaines séries peuvent présenter des facteurs communs, notamment des tendances communes.
- Ce constat a ouvert la voie à de nouvelles investigations économétriques, notamment à l'analyse de la cointégration des séries, très utiles pour modéliser certaines séries non-stationnaires.
- Données financières:
 - ☞ Marché à terme, entre le spot et le future
 - ☞ Actions vs indices, entre actions, les indices entre eux
 - ☞ Obligations à différentes maturités ou entre différents pays
 - ☞ En fait, à chaque fois que les données mesurent une même valeur, mais avec des décalages possibles; de temps, de localisation, ou pour des raisons économiques (cycles, ...), se traduisant par des rattrapages, des corrections des erreurs: d'où:
- ENGLE et GRANGER (1987 - Prix Nobel 2003)
 - ☞ ont montré que toutes séries cointégrées peuvent être représentées par un modèle à correction d'erreur (ECM) (Théorème de la représentation de Granger): décomposition en deux composantes: tendance commune à long terme + correction court terme.

La co-intégration par l'exemple

Trying to model the complex inter-dependencies between financial assets with so restrictive concept of correlation is like trying to surf the internet with an IBM AT." Carol Alexander

Imaginer un homme ivre avec son chien, marchant au hasard ...



si le chien n'est pas tenu en laisse, il n'y aucune raison pour que la distance entre l'homme et le chien reste bornée, en revanche, si le chien est tenu en laisse, la distance oscille et reste bornée ... surtout si la laisse est élastique ! $h_t - c_t$ est stationnaire

Les chemins de l'homme h_t et du chien c_t sont dits co-intégrés ... En d'autres termes, il y a co-intégration car les chemins possèdent une tendance stochastique commune et leur différence est stationnaire.
On ne sait pas où ils vont mais ils y vont ensemble!

Murray, M. P. "A drunk and her dog : An illustration of cointegration and error correction"

Régressions erronées (Spurious)
Nelson et Plosser ont montré que dans le cas de séries non stationnaires, la régression $x \sim y$ de deux marches aléatoires indépendante est significative à 5% dans 75% des cas !!!

cela n'a rien à voir la notion de corrélation des incréments $x_t - x_{t-1} = u_t$ et $y_t - y_{t-1} = w_t$
 u_t et w_t peuvent être de même loi, corrélés ou non, sans que $x-y$ soit stationnaire ...
dans le cas de séries co-intégrées, on peut même observer l'inverse: les mécanismes de rattrapages peuvent induire des corrélations négatives dans les mouvements à très court terme
- cf. Modèles à Correction d'Erreurs

Daniel HERLEMONT

7

Stationnarité

- Considérons une série autorégressive d'ordre 1 : $y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$
 ε_t d'espérance nulle et variance finie
- y_t est :
 - ☞ Stationnaire si $|\rho| < 1$
 - ☞ Marche aléatoire si $\rho = 1$
 - ☞ rappel: une série est stationnaire si sa moyenne et variance sont constantes $Covariance(y_t, y_{t-s})$ dépend seulement du retard s
- $y_t - y_{t-1} = \Delta y_t = -\gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$ avec $\gamma = (1-\rho)$
forme équivalente, faisant apparaître "une force de rappel" proportionnelle à l'écart avec la moyenne (0): $E(\Delta y_t | y_{t-1}) = -\gamma y_{t-1}$
- forme plus générale:
 - $y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$ avec $|\rho| < 1$
 - ou $\Delta y_t = \alpha + -\gamma y_{t-1} + \varepsilon_t$ avec $\gamma = (1-\rho)$
 - est stationnaire autour de $\alpha/(1-\rho)$

Daniel HERLEMONT

8

Tests de racine unitaire

- Considérons une série autorégressive d'ordre 1

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

- Si $\rho = 1$ alors la série y_t suit une marche aléatoire et n'est pas stationnaire. On montre qu'elle comporte au moins une racine unitaire. Il est donc important de tester la valeur de ρ . C'est l'objet des tests de racine unitaire.

$$\rho_T = \frac{\sum_t y_t y_{t-1}}{\sum_t y_{t-1}^2},$$

- **Les tests classiques de la régression ne fonctionnent pas lorsque $\rho = 1$**

$$\sqrt{T}(\rho_T - \rho) \xrightarrow{D} N(0, (1 - \rho^2)).$$

- => **Tests spécifique de racine unitaire**

- ☞ Le test de **DICKEY-FULLER (DF)** et augmenté (DFA)
- ☞ Le test de **PHILLIPS-PERRON (PP)**
- ☞ Le test de **SCHMIDT-PHILLIPS (SP)**
- ☞ Le test de **ELLIOT-ROTHENBERG-STOCK (ERS)**

Daniel HERLEMONT

9

Le test de DICKEY-FULLER

- **Trois spécifications à tester l'hypothèse nulle de racine unitaire :**

- ☞ $Dy_t = r y_{t-1} + e_t.$
- ☞ $Dy_t = a + r y_{t-1} + e_t.$
- ☞ $Dy_t = a + b.t + r y_{t-1} + e_t.$

- **En pratique, il est conseillé de commencer par la troisième équation et de procéder par élimination à partir du test de Student.**
- **Une table de DF propre à chaque équation permet de répondre au test.**

Le test de DICKEY-FULLER augmenté (ADF)

- **Le test DF suppose que e_t est un bruit blanc, ce qui n'est pas évident. Le test ADF est proposé pour combler cette lacune.**
- **Les formulations à tester sont donc modifiées pour intégrer une forme autorégressive d'ordre p :**
 - ☞ $Dy_t = r y_{t-1} + S c_j D y_{t-j+1} + e_t$ ($j = 2, p$).
 - ☞ $Dy_t = a + r y_{t-1} + S c_j D y_{t-j+1} + e_t$ ($j = 2, p$).
 - ☞ $Dy_t = a + b.t + r y_{t-1} + S c_j D y_{t-j+1} + e_t$ ($j = 2, p$).

Daniel HERLEMONT

10

Valeurs critiques des tests de Dickey Fuller

$$y_t - y_{t-1} = \Delta y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + e_t$$

| | Taille échantillon | | | |
|--------------------------------------|--------------------|-------|-------|----------|
| | 25 | 50 | 100 | ∞ |
| F ratio (5%) | 7.24 | 6.73 | 6.49 | 6.25 |
| Modèle AR avec constante | | | | |
| 2% | -3.75 | -3.58 | -3.51 | -3.43 |
| 5% | -3.33 | -3.22 | -3.17 | -3.12 |
| 10% | -2.63 | -2.60 | -2.58 | -2.57 |
| Modèle AR avec constante et tendance | | | | |
| 2% | -4.38 | -4.15 | -4.04 | -3.96 |
| 5% | -3.95 | -3.80 | -3.69 | -3.66 |
| 10% | -3.24 | -3.18 | -3.15 | -3.13 |

Daniel HERLEMONT

11

Autres tests

- Le test de PHILLIPS-PERRON (PP)
 - ☞ La distribution théorique à la base des tests DF et ADF suppose que les termes d'erreur sont homoscédastiques, ce qui n'est pas évident a priori.
 - ☞ Le test PP est une généralisation de la procédure DF qui prend en compte des erreurs hétéroscédastiques.
 - ☞ Les valeurs critiques sont celles des tests ADF.
- Le test de SCHMIDT-PHILLIPS (SP)
 - ☞ Les tests DF et associés dépendent, dans leur formulation, de l'existence ou non d'une dérive (constante ou tendance).
 - ☞ Le test de SP propose de contourner cette difficulté en construisant une série détrendée sur laquelle l'hypothèse de racine unitaire est testée.
- Le test de ELLIOT-ROTHENBERG-STOCK (ERS)
 - ☞ Le test ERS consiste en une démarche en cinq étapes permettant d'effectuer un test ADF sur la série détrendée de manière particulière.
 - ☞ On montre que ce test est nettement plus puissant que les tests classiques ADF.
- Les tests de ruptures structurelles
 - ☞ L'existence de ruptures structurelles dans une série peut induire une mauvaise conclusion quant à la nature de sa tendance. Il est possible en effet qu'une série stationnaire autour d'une tendance déterministe segmentée soit par erreur assimilée à une série non stationnaire.
 - ☞ Deux tests permettent de vérifier cet état de choses : Le test de PERRON, Le test de ZIVOT-ANDREWS

Daniel HERLEMONT

12

Cointégration et Tests de racine unitaire sous R

Tous les tests sont disponibles sous R:

Package **tsseries**: Time series analysis and computational finance

adf.test Augmented Dickey-Fuller Test
 arma Fit ARMA Models to Time Series
 bds.test BDS Test
 coef.garch Methods for Fitted GARCH Models
 fitted.arma Methods for Fitted ARMA Models
 fitted.garch Methods for Fitted GARCH Models
 garch Fit GARCH Models to Time Series
 irts Irregularly Spaced Time-Series
 jarque.bera.test Jarque-Bera Test
 kpss.test KPSS Test for Stationarity
 logLik.garch Methods for Fitted GARCH Models
 maxdrawdown Maximum Drawdown or Maximum Loss
 po.test Phillips-Ouliaris Cointegration Test
 portfolio.optim Portfolio Optimization
 pp.test Phillips-Perron Unit Root Test
 predict.garch Methods for Fitted GARCH Models
 runs.test Runs Test
 seqplot.ts Plot Two Time Series
 sharpe Sharpe Ratio
 sterling Sterling Ratio
 tsbootstrap Bootstrap for General Stationary Data

Package **urca** Unit root and cointegration tests for time series data

spcv Critical values for Schmidt & Phillips Unit Root Test
 ca.jo Johansen Procedure for VAR
 ca.po Phillips & Ouliaris Cointegration Test
 cajolst Testing Cointegrating Rank with Level Shift at Unknown time
 cajols OLS regression of VECM
 denmark Data set for Denmark, Johansen & Juselius (1990)
 ecb Macroeconomic data of the Euro Zone
 finland Data set for Finland, Johansen & Juselius (1990)
 llttest Likelihood ratio test for no linear trend in VAR
 ur.ers Elliott, Rothenberg & Stock Unit Root Test
 ur.kpss Kwiatkowski et al. Unit Root Test
 ur.kpss-class Representation of class `ur.kpss`
 ur.pp Phillips & Perron Unit Root Test
 ur.sp Schmidt & Phillips Unit Root Test
 ur.za Zivot & Andrews Unit Root Test

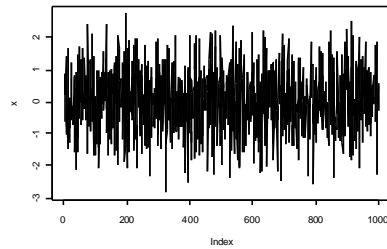
Ces deux packages contiennent de très nombreuses fonctions graphiques et données économiques et financières

Daniel HERLEMONT

13

Exemples de tests

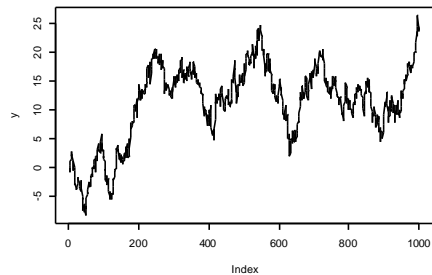
```
x = rnorm(1000) # pas de racine unitaire
adf.test(x)
adf.test(x,k=1)
Augmented Dickey-Fuller Test
data: x
Dickey-Fuller = -24, Lag order = 1, p-value = 0.01
alternative hypothesis: stationary
```



```
y <- diffinv(x) # contains a unit-root
adf.test(y)
```

Augmented Dickey-Fuller Test

```
data: y
Dickey-Fuller = -2.2, Lag order = 9, p-value = 0.4896
alternative hypothesis: stationary
```



Daniel HERLEMONT

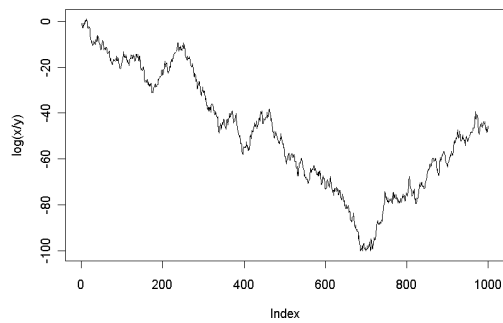
14

Exemples de tests (suite)

Deux actifs de même tendance et même corrélés, n'ont aucune raison d'être co-intégrés: la différence est toujours $I(1)$: intégrée d'ordre 1.

```
X=cumprod(exp(rnorm(1000)))
Y=cumprod(exp(rnorm(1000)))
plot(log(X)-log(Y),type="l")
```

$\log(X)-\log(Y)$
est aussi une marche aléatoire



```
> adf.test(log(x/y),k=1)
```

Augmented Dickey-Fuller Test

```
data: log(x/y)
Dickey-Fuller = -0.45, Lag order = 1, p-value = 0.984
alternative hypothesis: stationary
```

Daniel HERLEMONT

15

Une définition plus rigoureuse

Définition: Deux séries Y_t et X_t sont dites cointégrées si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

elles sont affectées d'une tendance stochastique de même ordre d'intégration d .
une combinaison linéaire de ces séries permet de se ramener à une série d'ordre d d'intégration inférieur.

Soit, $Y_t \rightarrow I(d)$ et $X_t \rightarrow I(d)$ tel que

$\alpha_1 Y_t + \alpha_2 X_t \rightarrow I(d-b)$ avec $d \geq b \geq 0$.

$[\alpha_1 \alpha_2]$ est appelée vecteur de cointégration.

Tests de cointégration:

Le résidu de la régression de Y sur X est une combinaison linéaire de ces deux variables et permet donc de vérifier la cointégration.

Il suffit donc de procéder à un test de stationnarité sur le résidu (DF ou ADF).

La table de lecture de la valeur théorique est tout de même différente (table de Mc Kinnon).

On peut également effectuer le test de Johansen.

Daniel HERLEMONT

16

Version continue du "retour à la moyenne"

Supposons qu'un arbitrage (statistique) s'exprime sous la forme d'un processus AR(1). Ce processus est la version discrète de son équivalent en temps continu: le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU), avec $W(t)$ un processus de Wiener

$$dX_t = \beta(\alpha - X_t)dt + \sigma dW_t$$

X_t oscille autour de sa moyenne α , $\beta > 0$ jouant le rôle du rappel vers cette moyenne

La distribution de loi de transition est gaussienne:

$$f(X_t = x, t; X_{t_0} = x_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2(t)}} e^{-\frac{(x-m(t))^2}{2s^2(t)}}$$

$$m(t) = \alpha + (x_0 - \alpha)e^{-\beta(t-t_0)}$$

$$s^2(t) = \frac{\sigma^2}{2\beta} [1 - e^{-2\beta(t-t_0)}]$$

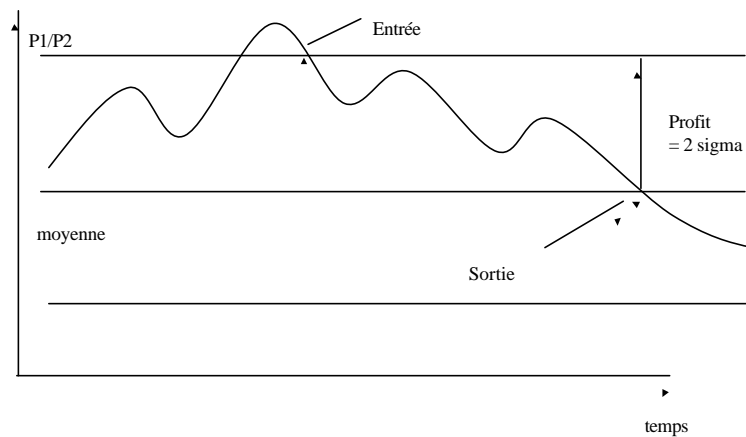
Comme dans le cas iid, la stratégie optimale consiste à investir la proportion

$$w_t = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu_t - r_f}{\sigma_t^2} \quad \text{soit} \quad w_t = \frac{1}{\gamma} \frac{\beta(\alpha - X_t) - r_f}{\sigma^2}$$

Daniel HERLEMONT

17

Stratégie simplifiée



Exemple de stratégie:

Entrer en position lorsque le rapport des prix P1/P2 s'écarte de la moyenne de 2 fois son écart type
Sortie lorsque le rapport des prix revient sur sa moyenne mobile.

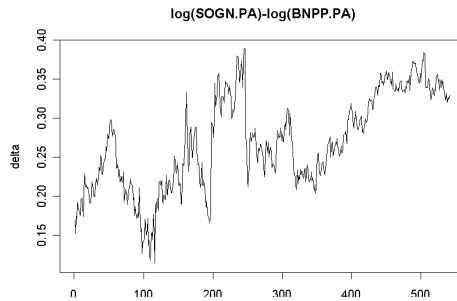
Daniel HERLEMONT

18

Exemples actions Francaises

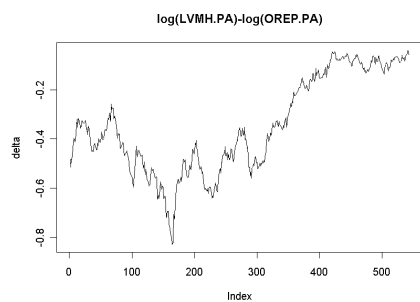
Société Générale vs BNP

Dickey Fuller Stat = -4
On peut accepter la stationnarité au niveau de confiance de 1%



LVMH vs L'Oreal

DF(1)=-1.8
n'est pas stationnaire au seuil de 1%



Daniel HERLEMONT

19

Quelques références on line

Engle <http://pages.stern.nyu.edu/~rengle>

Granger <http://www.econ.ucsd.edu/%7Ecgranger/>

page du prix Prix Nobel 2003: <http://www.nobel.se/economics/laureates/2003/public.html>

Katarina Juselius' Home Page <http://www.econ.ku.dk/okokj/>

de nombreux cours on line sur la co intégration

"Estimation and Inference in Econometrics" par Russell **Davidson**

et James G. **MacKinnon**, en version française:

Carol Alexander:

<http://www.ismacentre.rdg.ac.uk/nav2/default.asp?page=13&showpage=1&run=pplMoreDetails&pid=1&details=pub>

Notamment:

<http://www.iamgroup.ca/eduCentre/articles/The%20Cointegration%20Alpha.pdf>

Joel Hasbrouck: <http://pages.stern.nyu.edu/~jhasbrou>

pour la co intégration en intraday

Daniel HERLEMONT

20