

Gestion de Portefeuille et Croissance optimale

Daniel Herlemont

[email:dherlemont@yats.com](mailto:dherlemont@yats.com) - *YATS Finances & Technologies* - tel:+33 (0) 5 62 71 22 84

Résumé : Cet document de travail examine des stratégies de gestion de portefeuille à long terme dites de "croissance optimale", également connues sous le nom de critère de Kelly. Kelly est abordé par de nombreux auteurs d'horizons très différents qui parfois s'ignorent. Nous donnons un aperçu de ces différentes approches, en soulignant les résultats et propriétés remarquables.

Nous présentons une nouvelle méthode d'estimation que l'on pourrait qualifier de "Kelly non paramétrique" que nous appellerons YAUP, pour Yet Another Universal Portfolio. Sous des hypothèses peu restrictives de rendements journaliers bornés, la méthode YAUP conserve la même propriété dite d'universalité que les portefeuilles universels de Cover [24], à savoir la quasi certitude d'un taux de croissance à long terme identique au taux de croissance du meilleur portefeuille à pondérations constantes, donc meilleur que toute action ou tout indice, et ce dans le pire cas, y compris en présence de krachs tels que ceux de 1929, 1987, 2001. La méthode est également adaptative ou "online" : les estimations sont effectuées au fur et à mesure de l'arrivée de nouvelles données. Nous généralisons les portefeuilles universels à bien des égards :

- Alors que les portefeuilles universels sont construits sous une hypothèse de rendements iid, la méthode YAUP tente de capturer des dépendances temporelles court terme, par des estimateurs non paramétriques, analogues à ceux proposés par Györfi et Lugosi [31]. Les pondérations du portefeuille sont obtenues par la combinaison de plusieurs estimateurs non paramétriques à noyau, pour différents ordres d'auto-régressions et différentes largeurs de fenêtres. Les auto régressions non paramétriques permettent de capturer des co-dépendances complexes entre les actifs, difficiles à modéliser.
- Contrairement aux portefeuilles universels, les ventes à découvert et emprunts sont autorisés,
- Les YAUP peuvent être définis pour des fonctions d'utilité hyperboliques, généralisant le critère de Kelly à des aversions relatives pour le risque autres que celle du logarithme.

Malgré des propriétés séduisantes, la fonction d'utilité logarithmique est sans doute trop agressive. L'aversion relative permettra d'ajuster les pondérations à des objectifs de gestion acceptables en terme de volatilité, Value At Risk, ou de perte maximale historique, sans modifier le ratio de Sharpe, propre à la stratégie.

La méthode YAUP est testée sur les 30 actions de l'indice Dow Jones et l'indice lui-même sur un historique de 1990 à 2004, soit plus de 14 ans. Sans contrainte de gestion, si les ventes à découvert et emprunts sont autorisés, nous obtenons un portefeuille long/short, quasi "dollar neutre", avec un côté "long" bien diversifié en actions et short sur l'indice uniquement. La stratégie présente un ratio de Sharpe de l'ordre de 3, le maximum de la perte historique est du même ordre de grandeur que la volatilité. Avec une aversion relative de 30, nous obtenons une croissance annuelle de $G = 1.77$ avec 20% de volatilité, une Value At Risk journalière de -1.7% au seuil de 5% et 14% de perte maximale historique (max drawdown), le ratio de Sharpe étant inchangé à 2.8.

Dans le cas d'une gestion de type PEA, sans vente à découvert, ni emprunt, la méthode YAUP surperforme également toutes les autres méthodes universelles connues ce jour.

Nous testons également les portefeuilles universels YAUP sur les indices US et Européens : Dow Jones, S&P 500, Nasdaq, DAX et CAC40. Nous obtenons des résultats comparables aux actions. En considérant le S&P et NASDAQ seuls, la stratégie YAUP conduit à un ratio de Sharpe de 3 sur 20 ans d'historique, un portefeuille long/short, très résistant aux krachs, comme ceux de 1987. Alors que les portefeuilles optimaux sous hypothèses iid pour le même univers présentent des performances médiocres, avec un ratio de Sharpe de 0.35, ce test illustre la capacité des algorithmes à capturer des dépendances temporelles, telles que des relations d'ajustements à une tendance stochastique commune (relations de co-intégration, Carol Alexander[1]). Il est possible de traiter ce type d'instruments sur les marchés à terme, ce qui permet de réduire fortement les coûts de transaction.

Dans tous les tests réalisés, le portefeuille obtenu bat largement le meilleur portefeuille à pondérations constantes "in hindsight" (BCRP) qui correspond au meilleur portefeuille possible sous hypothèses de rendements indépendants.

La performance provient d'une part de la capture d'une volatilité en excès grâce à une gestion active de rebalancing, d'autre part, de la capture de relations complexes de co-dépendances transversales et temporelles à court terme entre actifs, grâce à des estimations auto régressives et conditionnelles des pondérations optimales.

Les estimations sont non paramétriques. Il n'est donc pas nécessaire de modéliser les relations de co-dépendances entre actifs, ni même à tester leur existence. Ces méthodes ne sont pas spécifiques d'une classe d'actifs telles que les actions et indices, elles peuvent être utilisées sans modification pour d'autres actifs : obligations, devises, matière première, voire d'autres stratégies pour les combiner au mieux, différents fonds pour réaliser, par exemple, un "fonds de fonds" performant. Dans le cas de sous-jacents négociables sur les marchés à

terme, tels que les indices, nous envisageons d'étendre ces méthodes à l'intraday, permettant de bénéficier à la fois, d'une meilleure convergence des estimations non paramétriques, grâce à la disponibilité de grands volumes de données, ainsi que de performances accrues, grâce à certains faits stylisés très prononcés en intraday, tels que les excès de volatilité, et relations de co-dépendance temporelles complexes entre différents actifs. La plateforme YATS/RAPT[33] pourra être utilisée pour implémenter ces méthodes sous la forme d'automates de trading pour intervenir sur les marchés futures et actions.

Ce document ne fournit qu'un aperçu permettant de comprendre et justifier les méthodes utilisées. Il est extrait d'un autre document interne donnant plus de détails sur les algorithmes utilisés, ainsi que des résultats de tests plus étendus.

Ces premiers résultats nous encourage à poursuivre les travaux dans plusieurs directions :

- au niveau "théorique" : sur une formulation et une généralisation en temps continu, sur l'étude approfondie des estimateurs non paramétriques universels et adaptés à des faits stylisés connus des actifs financiers, difficiles à modéliser par des méthodes classiques, sur les propriétés de convergence des estimateurs et une meilleure explication des performances des portefeuilles experts, et des tests en présence de modèles connus (modèles VAR, auto-régressifs multivariés, M-GARCH, ...),
- une meilleure prise en compte des coûts de transactions au coeur même des estimations,
- des implémentations plus efficaces des algorithmes, encore trop coûteux en temps de calcul et en espace mémoire. En l'état actuel, il faut plus de 24 heures pour simuler un YAUP, sur un univers de 30 actions et 10 ans d'historique.

Remerciements : à Daniel GABAY pour son soutien et ses encouragements.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Le critère de Kelly, point de vue historique	7
1.2	Les portefeuilles à pondérations constantes	9
1.3	Les méthodes universelles	9
1.4	Comparaisons avec le CAPM	13
2	Rappel du critère de Kelly, propriétés remarquables	14
2.1	Le critère de Kelly	14
2.2	Cas multi-actifs	19
2.3	Temps continu	20
2.4	Kelly et la fonction d'utilité logarithmique	21
2.5	Kelly, autres propriétés remarquables	22

2.6	Relation avec le ratio de Sharpe	24
2.7	Vers un arbitrage de la volatilité?	25
2.8	Kelly et l'efficience des marchés	26
2.9	Kelly fractionnel	28
2.10	Perte maximale historique	30
2.11	Queues épaisses	35
3	Ajustements dynamiques et coûts de transactions	36
3.1	Ajustements dynamiques	36
3.2	Coûts de transactions	38
4	Estimation du taux de croissance	42
5	Gestion de portefeuille : notations et définitions	43
5.1	Contraintes :	44
5.2	Stratégie Buy & Hold	45
5.3	Portefeuille CRP	46
5.4	Cas général	46
5.5	Taux de rotation et coûts de transaction	47
5.6	Hedging	48
5.7	Les indices	48
6	Les Portefeuilles Universels	49
6.1	Introduction	49
6.2	Méthode	50
6.3	Compétitivité des portefeuilles universels	51
6.4	Portefeuilles Universels - propriétés remarquables	52
6.5	Portefeuilles Universels - discussion	53
6.6	Portefeuilles Universels - variantes	54
6.7	Vente à découvert et marges	56
6.8	Applications et analogies avec la compression des données	56
7	La méthode YAUP	57
7.1	Présentation générale	57
7.2	Pourquoi ça marche?	60
7.3	Etudes empiriques	61
7.3.1	CAC40/L'Oreal	61
7.3.2	Performances sur les actions du DJI	62

7.3.3	Indices US et Europe	66
7.3.4	Tests utilisant les cours de fermeture US et ouverture Europe	67
7.3.5	S&P et NASDAQ	68
8	Conclusions	72
9	References	75

1 Introduction

Le critère de Kelly[40] consiste à rechercher la stratégie qui maximise le taux de croissance à long terme :

$$\max G_t = \frac{1}{t} \log \frac{W_t}{W_0} \quad (1)$$

avec W_t la richesse au temps t .

Dans le cas de rendements iid, la stratégie qui maximise le taux de croissance est obtenue par un portefeuille à pondérations constantes.

Cette stratégie possède de nombreuses propriétés intéressantes :

- la stratégie de croissance optimale correspond à la fonction d'utilité logarithmique.
- optimiser le taux de croissance, c'est aussi rechercher le meilleur portefeuille médian, donc maximiser les réalisations les plus typiques ...
- c'est aussi la stratégie qui maximise la moyenne géométrique (par définition même du taux de croissance)
- c'est aussi la stratégie qui minimise l'espérance du temps nécessaire à l'obtention d'une richesse donnée (Breiman [18])

Mais la stratégie de croissance optimale est aussi celle qui présente la perte maximale historique (drawdowns) la plus sévère : la distribution des pertes historiques possède un exposant de queue égal à 2, donc une variance infinie ...

La stratégie de Kelly est très risquée dans le cas notamment de sur estimation des pondérations, pouvant provenir, par exemple, d'une mauvaise estimation des paramètres du modèle. Nous montrons qu'il sera sans doute préférable d'utiliser des stratégies moins agressives, correspondantes à des fonctions d'utilité puissance (aussi appelée Kelly Fractionnel) avec une aversion relative au risque supérieure à 1.

Le critère de Kelly pourra être associé à d'autres critères tels que la minimisation des pertes historiques (Grossman et Zhou [32]) ou la recherche de garanties à long terme (Ziembra [52], Boulier [19]).

Nous verrons que dans le cas de Kelly, le risque de modèle peut être particulièrement coûteux dans le cas ou celui ci conduit à sur estimer les leviers.

Les méthodes que nous utilisons sont inspirées des portefeuilles universels de Cover, Cross/Barron, et Gyorfi/Lugosi. Ces méthodes évitent justement d'avoir à modéliser les rendements, les pondérations sont obtenues par des méthodes non paramétriques, adaptatives, universelles et compétitives :

- non paramétriques : il n'est pas nécessaire de procéder à des modélisations complexes : "let's the data speak" ...
- adaptatives ou online : on apprend au fur et à mesure de l'arrivée des données
- universelles : le taux de croissance à long terme est le meilleur taux de croissance possible sous hypothèse iid, c'est celui du meilleur portefeuille "in hindsight" à pondérations constantes. Ces résultats sont obtenus pour une classe très large classe de distributions : des rendements journaliers stationnaires et bornés suffisent. En général, on qualifie d'universelle toute méthode qui permet d'obtenir (presque sûrement) des résultats identiques (taux de croissance, taux d'erreurs de prédiction, erreur quadratique de prédiction, ...) à ceux qu'on auraient obtenu en connaissant l'avenir, et ce, pour une classe de distributions la plus large possible. Aussi surprenant que cela puisse paraître, de telles méthodes existent.
- compétitives : on est capable de garantir des performances dans le pire cas, en l'occurrence le meilleur taux de croissance à long terme. Ce dernier point est essentiel, car il permet d'apporter une forme de garantie, sans trop sacrifier à la performance.

On peut montrer qu'il n'existe pas d'estimateur consistant des paramètres d'une diffusion quelconque [58]. Les méthodes d'estimation des paramètres d'une diffusion multivariée, même non paramétriques, telles que proposées par Ait-Sahalia [4] par exemple, ne semblent donc pas d'un grand secours.

En revanche, comme le montre Cover, il existe bien des méthodes non paramétriques pour estimer les pondérations conduisant au meilleur taux de croissance, de la même façon, Gyorfi/Lugosi utilisent des estimateurs qui possèdent cette même propriété d'universalité et de compétitivité tout en capturant des dépendances multivariées temporelles, pouvant être difficiles à modéliser, conduisant à des performances parfois spectaculaires.

Comme le fait remarquer JF Boulier [19], la convergence d'une stratégie de Kelly peut être longue : en prenant le cas d'un taux sans risque à $r_f = 4\%$, d'un actif risqué, avec $\mu = 10\%$ et $\sigma = 20\%$, le levier optimal est de $1.5 = (\mu - r_f)/\sigma^2$; sur 30 ans d'historique, il existe encore un probabilité de 20% de faire moins bien que le taux sans risque. Il faut attendre 240 ans pour être quasi certain (à 99%) de battre le taux sans risque ! (voir aussi les commentaires de Mark Rubinstein [57]).

Même si cet exemple est caricatural, il en demeure pas moins que les problèmes de convergence sont bien réels, quand bien même on aurait correctement estimé les paramètres

du modèle. Les portefeuilles universels classiques peuvent présenter ce même défaut.

En revanche, s'agissant de méthodes qui capturent des dépendances temporelles la convergence est plus rapide. La vitesse de convergence peut être appréciée en observant le ratio de Sharpe : si les rendements du portefeuille suivent une diffusion à peu près normale, le temps caractéristique, défini comme le temps nécessaire à observer un rendement (signal) du même ordre de grandeur que la volatilité (bruit), est de $1/\text{sharpe}^2$. Avec un ratio de Sharpe égal à 3, qui est le ratio que nous constatons, on pourra juger de la stratégie au bout de $1\text{an}/9$, soit moins de 2 mois. Pour l'action considérée dans l'exemple ci dessus, le temps caractéristique est de plus de 10 ans.

1.1 Le critère de Kelly, point de vue historique

En 1956, Kelly [40], chercheur chez AT&T, fait figure de pionnier en donnant la solution qui maximise le taux de croissance (1), elle consiste à investir à tout instant une même fraction du capital. Le portefeuille se comportant de manière exponentielle, $W_t \approx W_0 (e^G)^t$, la magie des intérêts composés s'opère avec le meilleur taux de croissance ... D'où le succès de Kelly ...

On retrouve donc Kelly sous diverses formes, chez de nombreux auteurs d'horizons très différents qui parfois s'ignorent :

- Thorp [65] [66], élève de Shannon a fortement contribué à diffuser le principe, tant au blackjack, pour les courses de chevaux, que pour les marchés financiers.
- Vince [67] est bien connu des praticiens et traders sur futures
- Ziemba [69] [52] place Kelly au coeur de la gestion alternative et du trading de convergence. Voir aussi l'utilisation de Kelly dans des stratégies de type convergence [39].
Toute stratégie basée sur de faibles écarts nécessite des leviers qui peuvent être importants. Or nous verrons que le levier est d'autant plus imprécis que la volatilité du sous-jacent est faible, l'incertitude sur le levier est grande et le risque de dépassement élevé ...
- On retrouve Kelly sous différentes formes dans les problèmes de contrôle optimal en temps continu : Merton [48], Grossman et Zhou [32] Pliska [17], ...
- Les "econophysiciens" s'intéressent à la question : Baviera [7] aborde Kelly sous l'angle de la théorie de l'information. Le critère de Kelly correspond à une entropie minimale, donc une prédictibilité maximale au sens de Shannon. Le taux de croissance y est également vu comme un exposant de Lyapunov du portefeuille. Maslov et Zhang [50] [53] [54] ont également fortement contribué à la popularité de Kelly dans la sphère des econophysiciens, mettant en évidence plusieurs propriétés remarquables, telles que l'effet "pompe à volatilité, et la caractère "sauvage" des drawdowns (proche d'une

distribution de Cauchy)

- Kelly peut être utilisé pour répliquer et pricer des options dans un marché incomplet : Aurell & al. [6], Avellaneda[5],
- Sous l’angle de la dynamique multi agents et de l’équilibre des marchés. Le premier modèle de marché est celui du CAPM; dans ce monde presque parfait, une gestion passive suffit à être optimal. Mais les hypothèses du CAPM ne sont pas réalistes; tous les intervenants n’ont pas les même modèles d’évaluation, ni les même attitudes face au risque, conduisant à des faits stylisés connus, tels que des excès de volatilité, des asymétries. Dans un premier temps, les modèles d’agents visent à reproduire au mieux ces faits stylisés en simulant l’interaction de nombreux agents plus ”réalistes”. De nombreux modèles ont été développés : les modèles de Farmer [28], Cont, Lux, ... Blok [13] [14] reprend différents modèles d’agents sous l’éclairage de Kelly. Blume et Easley (1992) [8] établissent des équilibres de marché multipériodique, montrant que les seuls survivants à long terme sont les traders dotés de fonction d’utilité logarithmique. Sciubba [59] [25] de même, montre une dominance stochastique des traders dotés d’une fonction d’utilité logarithmique, conduisant les CAPM à la ruine. Hens[27] montre que le marché n’est stable que si les actifs sont évalués par un modèle de type DDM (Dividend Discount Model), généralisant, aux marchés incomplets, les résultats obtenus par Blume et Easley. Parkes [55] élabore des stratégies de gestion en simulant des agents coopératifs pour divers modèles de marché.
- Enfin, Kelly est au coeur des stratégies dites universelles ”à la Cover” [23] [24].

Le portefeuille universel de Cover est une version ”non paramétrique” de la solution de Kelly, une généralisation de Kelly à des distributions quelconques.

Les portefeuilles universels donnent lieu à de nombreuses améliorations/discussions :

- des comparaisons avec d’autres algorithmes online (Borodin, El-Yaniv, Gogan [9]),
- des méthodes d’approximation des portefeuilles universels (Helmbold, Shapire, Singer [35]),
- avec coûts de transactions (Blum et Kalai [11], Iyengar [37]),
- Cover avec des informations exogènes (Cover et Ordentlich [21]).
- un examen à la loupe, avec et sans relations de cointegration (Blaedel, Huge et Lando [12]),
- en exploitant les changements de régime (Singer [62]),
- dans [10] El Yaniv et al. améliorent sensiblement les performances et la convergence,
- Cross et Barron [20] proposent des nouvelles méthodes qui s’accommodent de dépendances temporelles, compatibles avec des ventes à découvert ($w_i < 0$) et emprunts ($w_i > 1$), des temps de calcul polynomiaux et une extension au continu.
- Enfin, Gyorfı et Lugosi [31] développent des nouvelles méthodes permettant d’exploiter des dépendances temporelles de manière non paramétrique. Ces extensions permettent

de mieux exploiter les co-dépendances entre actifs, tant transversales que temporelles.

1.2 Les portefeuilles à pondérations constantes

Cover s'appuie sur un résultat important dû à Breiman (1961)[18]. Dans le cas de rendements iid (Indépendants et Identiquement Distribués), le meilleur taux de croissance est obtenu par un portefeuille à pondérations constantes, l'équivalent de la fraction constante dans Kelly. Les portefeuilles à pondérations constantes sont appelés des CRP, pour Constant Rebalanced Portfolio.

L'absence d'autocorrélation des rendements rend l'hypothèse iid acceptable et réaliste. Des rendements iid recouvrent déjà une très large classe de distributions : les rendements peuvent avoir des queues épaisses, présenter des corrélations entre actifs, des non linéarités dans ces corrélations, ... Si bien que les CRP, solution optimale du cas iid, constituent sans doute une bonne base pour la recherche de stratégies optimales.

Breiman (1961)[18] montre aussi que la stratégie de Kelly minimise l'espérance du temps nécessaire à l'obtention d'une richesse donnée.

Afin de maintenir les pondérations constantes, on devra effectuer des réajustements en fonction de l'évolution des prix, d'où le terme de Rebalancing. Si le prix d'un actif baisse trop, sa pondération au sein du portefeuille va baisser, il faut donc en acheter pour retrouver la pondération suivie.

Même si les effets semblent les mêmes, on ne doit pas confondre ce type de stratégie avec une stratégie dite de "mean reversion". Il n'y a ici aucune hypothèse de processus auto-régressif de retour à la moyenne.

Le terme "Constant" du CRP est trompeur, on devrait plutôt parler d'"Active Rebalancing" : le CRP est une gestion très active. Il en va différemment avec un portefeuille Buy & Hold (BAH) qui est une gestion passive : dans un portefeuille BAH, les quantités restent fixes et les pondérations évoluent en fonction des performances des actifs (ou capitalisations).

Théoriquement les réajustements devraient se faire en continu, ce qui n'est ni réaliste, ni souhaitable, en raison des frictions (coûts de transaction, spread, ...). Il existe donc des zones dites de non trading dans lesquelles on autorise les pondérations à varier sans qu'il soit souhaitable de procéder au rebalancing, voir Leland [43].

1.3 Les méthodes universelles

Dans le cas de rendements iid, la stratégie qui maximise G_t est donc un CRP. Mais quel CRP ? sans rien savoir ou presque des rendements ?

Dès 1984, Cover [23] propose les portefeuilles universels [24], permettant d'atteindre le taux de croissance du meilleur CRP rétrospectif, y compris dans le pire cas!!!

La méthode de Cover consiste à investir dans l'ensemble des portefeuilles CRP, chaque portefeuille CRP étant pondéré par sa performance. Des propriétés statistiques de la gestion de portefeuille font que la performance s'approche de plus en plus du meilleur portefeuille CRP in hindsight.

Cover parle de [machines à remonter le temps](#) :

"Wouldn't it be great to have the security of hindsight? A time machine, perhaps? You could travel to the future to find the next Cisco Systems, jump back to the past to buy stock, and laugh your way to the bank. Or you could avoid market crashes like those of 1929 and 1987. Tom Cover has the next-best thing to a time machine: He has an algorithm – a computational procedure – that uses the past to predict the future. It works as well or better than hindsight, outperforming a pretty good investment strategy: diversifying your stock portfolio and hoping that performance of superstars will more than make up for money wasted on losers."

Il ne s'agit pas du dernier guru de Wall Street, mais bien de Thomas Cover, professeur à Stanford, une référence en Théorie de l'Information ...

Pour reprendre le langage imagé de Thomas Cover, disons que les portefeuilles universels, tout comme les CRPs, fonctionnent comme des pompes à volatilité :

So if this is the best possible strategy, what would happen if everyone used it? "Nothing would break," explains Cover, "but the market would be substantially calmer. The suggested portfolio can be thought of as riding the wave of the stocks and living off the fluctuations. For example a float and ratchet can be placed in the ocean and energy can be pumped out. This does not lower the tide, nor does it violate the second law of thermodynamics, but hundreds of these devices would create a calmer and flatter ocean around them." Thomas Cover, Dr. Dobbs Journal, July, 2000

Même corrigées du risque et après coûts des transactions, on peut expliquer des performances "anormales" par l'excès de volatilité; phénomène bien connu : les volatilités sur un actif ne peuvent être expliquées par la seule volatilité sur les fondamentaux, voir Shiller [60] [61]. Il en va de même pour les corrélations transversales entre actifs [46]. Si ce type de stratégie devient répandu, on pourrait observer une baisse de la volatilité, jusqu'à atteindre une volatilité plus "rationnelle", provenant essentiellement de l'incertitude sur les fondamentaux.

La performance "anormale" provient donc de biais robustes et persistents : l'excès de volatilité sur les marchés n'est pas près de disparaître ... et nul besoin d'inefficience, si ce n'est cet excès de volatilité.

La méthode de Cover consiste à investir dans l'ensemble des portefeuilles CRP, chaque portefeuille CRP étant pondéré par sa performance. Il faut donc calculer toutes les performances de tous les CRP pour tous les actifs sur tout l'historique ... La méthode est donc consommatrice, en temps de calcul, et en capacité mémoire ... Il est vain d'envisager de

résoudre le portefeuille universel au delà de 10 actifs ... Il existe cependant des méthodes pour accélérer les calculs, sans trop détériorer les ratios de compétitivité [41].

Les méthodes mises en oeuvre ici complètent les algorithmes de Cover. Cover ne cherche pas à exploiter des dépendances temporelles qui pourraient exister ; les méthodes non paramétriques à l'aveugle induisent des lourdeurs dans les calculs ... Les méthodes que nous étudions vont, au contraire, tenter d'exploiter des dépendances connues et moins connues ; si prédictibilité il y a, les performances en seront sensiblement améliorées, la convergence plus rapide, les temps de calcul moindres, à portée du temps réel, tout en conservant le caractère compétitif. Dans le but d'apprendre les bonnes pondérations, nous consulterons une famille d'experts statistiques effectuant des régressions systématiques, depuis de simples régressions linéaires jusqu'aux régressions non paramétriques à noyau, pour capturer des co-dépendances exploitables (donc significatives), tant transversales (cross sectionnal) que temporelles, qu'il s'agisse de corrélations, des effets GARCH, effets de levier [15], de co-intégration entre actions/indices, des effets momentum et/ou mean reversion [44], ...

Les experts seront eux mêmes des CRP. Il faudra ensuite utiliser ces conseils d'experts pour en faire un système universel et compétitif, fonctionnant donc sur des distributions de rendements quelconques tout en garantissant des performances dans le pire cas. La batterie des experts "compétitifs" étant en place, on peut ajouter d'autres types d'experts, utilisant par exemple des modèles et données fondamentaux classiques, voire de vrais experts/managers/fonds à condition toutefois d'avoir une confiance suffisante dans les managers, et/ou disposer de tracking records suffisants, il ne suffit pas de prendre quelques experts pour s'assurer des propriétés de convergence vers le meilleur taux et surtout du caractère compétitif ... c'est la propriété la plus importante à garantir, mais c'est aussi la plus délicate à établir car elle fait appel à des notions sophistiquées en théorie de l'information. Cette propriété se traduit par l'utilisation d'un grand nombre d'experts. Par exemple, nous montrerons que la méthode naïve qui consiste à choisir l'unique portefeuille CRP optimal calculé à partir des historiques n'est pas universel ni compétitif ...

Plus les experts seront nombreux et diversifiés, meilleurs seront les résultats : l'algorithme de combinaison des experts reconnaîtra les siens. Le portefeuille réel consistera en une diversification dans ces différents experts, le poids de chaque expert sera fonction de sa performance.

Évidemment, nous n'investissons pas physiquement dans ces différents portefeuilles, ils ne sont utilisés que comme intermédiaires pour calculer les pondérations effectives dans l'univers des actifs négociables.

Il existe plusieurs façons de combiner les experts. Une technique de combinaison simple et efficace consiste en un Buy & Hold des différents experts, le capital initial étant réparti de manière uniforme dans les différents experts. Nous examinerons d'autres méthodes que l'équipondération : pondérations de Dirichlet qui donnent plus de poids aux portefeuilles

composés d'actifs en nombre réduit, pondération majoritaire, en performance cumulée ou moyenne mobile, des experts coopératifs et communicants ... Cette question de la meilleure utilisation de conseils d'experts est un domaine très actif en Intelligence Artificielle, également connu sous d'autres termes tels que "aggregating strategy, boosting, hedge algorithm".

Les algorithmes de combinaison optimale d'experts peuvent être utilisés indépendamment de tout le reste, par exemple, pour constituer un fonds de fonds.

En général, l'utilisation des experts conduira à des évolutions des pondérations dans les actifs risqués, conformes aux évolutions du marché, à savoir, plutôt un suivi de tendance à moyen terme, doublé d'une stratégie de "mean reversion" à très court terme, ne serait-ce que par le simple effet mécanique du rebalancing des CRP.

Le nombre élevé d'experts est nécessaire afin de respecter la contrainte de compétitivité et apporter des garanties sur les performances futures dans le pire cas : "les performances passées ne préjugent pas des performances futures" est sans doute applicable à une méthode prise isolément, un expert particulier, mais pas dans le cas des méthodes présentées ici, on pourra moduler en disant que la diversité des experts permet de garantir un taux de croissance identique au meilleur CRP sur le long terme.

Ces méthodes sont universelles, elles fonctionnent avec des rendements quelconques. On peut même relaxer l'hypothèse iid et montrer que ce meilleur taux de croissance peut être atteint sous les seules hypothèses de rendements journaliers stationnaires et bornés ($|\log x_t| < \infty$). Cette dernière contrainte est évidemment largement vérifiée, voire même garantie par les autorités de marché, comme la mise en place des mécanismes de suspension des cotations pour éviter de trop fortes fluctuations journalières. Par ailleurs, en utilisant les arguments de Fernholz [29] sur les notions de diversité, les marchés sont moins dispersés qu'ils devraient l'être en raison des régulations (lois anti trust, ...). Il en résulte des anomalies et des opportunités d'arbitrages à long terme.

L'hypothèse des rendements bornés signifie qu'il existe une constante B , telle que $|\log x_{t,i}| < B$ pour tout actif i et date t , avec $x_{t,i}$ le prix relatif garanti que la moyenne reste bornée :

$$-B < \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \log x_{t,i} < B$$

Cette expression n'est autre que le taux de croissance de l'actif en admettant sans perte de généralité que le prix à $t = 0$ est égal à 1. En principe le taux de croissance à long devraient être le même pour toutes les actions (qui devrait être celui de l'économie elle même). En réalité, en utilisant l'argument de Fernholz, il en va différemment, si on considère un seul actif, on observe plutôt des croissances sous optimales, en raison de régulations. On pourra donc admettre facilement que le taux de croissance des actifs possède une limite, autrement dit, une hypothèse d'ergodicité en moyenne.

Quant à la stationnarité des rendements, c'est une hypothèse couramment admise. Les tests de stationnarité (KPSS, par exemple) ne permettent pas de la rejeter. La vraie question n'est pas tant de savoir si oui ou non les rendements sont stationnaires, mais si on peut les modéliser comme tel pour le problème posé.

Dans le cas de Gyorfi/Lugosi, par exemple, l'hypothèse de stationnarité ne s'applique pas tant aux rendements eux mêmes qu'à certains patterns significatifs qui vont donner lieu à sur-performance, patterns obtenus par des estimations conditionnelles non paramétriques et auto régressives. L'hypothèse de stationnarité ne nous est utile que pour supposer une répétitivité suffisante de ces patterns.

1.4 Comparaisons avec le CAPM

Les portefeuilles universels peuvent être comparés au CAPM. Sous les hypothèses classiques du CAPM et dans le cas d'une fonction d'utilité quadratique (ou sous l'approximation des portefeuilles peu risqué et d'un développement de la fonction d'utilité au second ordre), le portefeuille universel se situe bien sur la frontière efficiente.

Dans les autres cas, même si les rendements sont lognormaux, un portefeuille log optimal n'est pas sur la frontière efficiente. Ziemba [70], avec des exemples numériques, compare le portefeuille log optimal ou portefeuille de Kelly avec le portefeuille qui maximise un critère espérance/variance, appelé portefeuille de Markowitz. Lorsque les rendements de l'actif sont proches de la queue de distribution, le portefeuille de Kelly bat le portefeuille de Markowitz. C'est sans doute le cas avec des actifs fortement sous évalués ou sur évalués.

Inversement, le portefeuille de Kelly fait moins bien que le portefeuille de Markowitz lorsque les rendements sont proches de la moyenne. Rappelons les hypothèses restrictives du CAPM : :

- normalité des rendements,
- anticipations rationnelles et partagées sur les rendements, en terme d'espérances et volatilités,
- réduction de la fonction d'utilité à un critère espérance/variance, avec une aversion relative au risque égale à 1, celle de la fonction d'utilité logarithmique.

Le consensus sur les rendements espérés s'avère sans doute le plus délicat, idem quant à la stabilité des corrélations, des beta, ...

Ces modèles font souvent des hypothèses de linéarité qui les rendent peu robustes aux mouvements extrêmes du marché.

En outre, il faut alimenter ces modèles avec des données exogènes (prévisions des bénéfices, etc ...), peu compatibles avec un système entièrement automatique.

Le portefeuille universel s'"affranchit" de tous ces problèmes en trouvant directement les pondérations les plus pertinentes.

Autre différence importante : le CAPM ne s'intéresse qu'à une seule période, le portefeuille universel, à plusieurs périodes. Sur une seule période, la volatilité apparaît comme un ennemi, sur plusieurs périodes, elle peut être un allié ...

L'approche de type CAPM est bien entendu respectable et souhaitable.

Nous réintroduisons cette dimension "fondamentale", par l'utilisation de portefeuilles experts fondamentaux. Dans le cas d'un modèle fondamental, ces pondérations sont issues d'un portefeuille efficient et des anticipations basées sur un modèle DDM (Dividend Discount Model). Les excès de volatilité pourront être estimés en comparant la volatilité historique avec la volatilité issue des estimations (dispersion des opinions chez analystes, par exemple).

Le modèle de type DDM (Dividend Discount Model) conduit à une stratégie de type value : acheter lorsqu'un l'actif est sous évalué, vendre si il est sur-évalué, qui présente à l'évidence un air de famille avec des stratégies de type rebalancing. Est ce à dire que si rendements anormaux il y a, on pourrait l'attribuer à la volatilité en excès de la volatilité des dividendes (voir Shiller [60] [61]) ?

2 Rappel du critère de Kelly, propriétés remarquables

Cette section est un rappel sur le critère de Kelly, ses propriétés connues et moins connues.

2.1 Le critère de Kelly

Prenons un jeu de "quitte ou double" :

- on gagne la mise avec une probabilité $0.5 < p < 1$
- on perd la mise avec une probabilité $q = 1 - p < 0.5$.

Si on investi la totalité de son capital, c'est la ruine assurée : tôt ou tard, on perdra : p étant < 1 , la probabilité de la première perte au temps t est $p^{t-1}(1 - p)$. Si on ne parie pas, on ne profite pas de l'avantage donné. On doit donc jouer une fraction de son capital ? La fraction optimale est donnée par Kelly.

La solution de Kelly consiste à maximiser le taux de croissance à long terme du portefeuille.

Soit W_n la valeur du portefeuille à la période n , le taux de croissance G asymptotique est donné par :

$$G = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{W_n}{W_0}$$

Soit f la fraction du capital à investir, sur n périodes, w est le nombre de gains, et l est le nombre de pertes ($n = w + l$).

$$W_n = (1 + f)^w (1 - f)^l W_0$$

$$\begin{aligned}
 G(f) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w}{n} \log(1+f) + \frac{l}{n} \log(1-f) \\
 &= p \log(1+f) + q \log(1-f) \text{ avec probabilité un} \\
 &= E[\log W_1/W_0]
 \end{aligned}$$

Maximiser le taux de croissance G sur le long terme est donc équivalent à maximiser l'espérance du logarithme de la richesse sur la prochaine période, équivalent au critère de l'utilité espérée avec une fonction d'utilité logarithmique.

L'espérance de l'utilité possède une signification, celle du taux de croissance, ce qui n'est pas le cas, en général, pour une fonction d'utilité quelconque, où le critère du maximum de l'utilité espérée ne vise qu'à satisfaire un compromis rendement/risque.

G possède un maximum unique entre 0 et 1 obtenu en annulant la dérivée de G par rapport à f :

$$G'(f) = \frac{p}{1+f} - \frac{q}{1-f}$$

$G'(f) = 0$ pour :

$$f^* = p - q$$

et

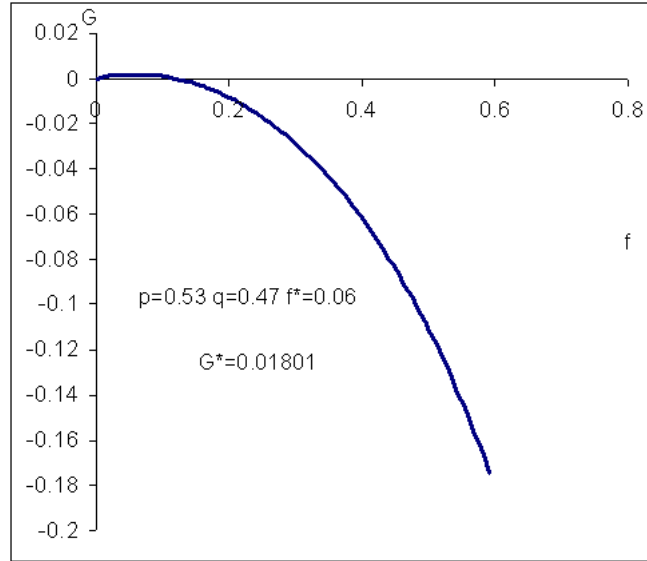
$$G^* = G(f^*) = p \log p + q \log q + \log 2$$

G^* est en étroite relation avec la notion d'entropie ($E = -p \log p - q \log q$) : maximiser le taux de croissance revient à minimiser l'entropie, donc la prédictibilité au sens de Shannon.

C'est d'ailleurs le point de vue adopté par Kelly dans son article original, ayant pour sujet la transmission et traitement d'information. Baviera [7] adopte également ce point de vue.

Prenons l'exemple suivant :

2 RAPPEL DU CRITÈRE DE KELLY, PROPRIÉTÉS REMARQUABLES



$p = 0.53$ $q = 0.47$ $f^* = p - q = 0.06$ et $G^* \approx 0.01801$ Pour un avantage aussi minime soit-il ($p = 0.53$), le taux de croissance reste respectable $G^* \approx 1.8\%$ soit un doublement en 385 périodes! Mais le levier doit rester très faible : 6% seulement du capital. Kelly permet donc d'exploiter "au mieux" un avantage, aussi faible soit il. Mais attention aux excès : les pertes interviennent dès 12% d'exposition : à $f \approx 60\%$, le taux de croissance probable est $\approx 18\%$, après 12 périodes, il ne reste plus que $11\% \approx \exp(-0.18 * 12)$ du capital!

Une question essentielle et critique est donc celle de l'estimation de cette probabilité. Nous aborderons cette question à propos des estimations et prédictions universelles.

On notera que le risque de ruine n'existe pas en théorie, le levier étant inférieur à 1.

Une autre approche : par application du théorème de la limite centrale :

$$\log(W_n/W_0) = \sum_{i=1,n} \log W_i/W_{i-1}$$

$\log W_i/W_{i-1}$ étant de même loi et indépendants, la distribution $P(\log(W_n/W_0))$ peut être approchée par une loi normale de moyenne :

$$m = n[p \log(1 + f) + q \log(1 - f)] = nG(f)$$

et variance

$$v = np(1 - p) \log^2 \frac{1 + f}{1 - f}$$

Autrement dit, W_n/W_0 est lognormal.

Dans le cas de grandes déviations, il convient de revoir l'approximation normale. Sornette [63] donne une approximation des queues de distribution du portefeuille, utilisant la théorie des grandes déviations de Cramer. Dans certains cas, l'approximation gaussienne sur-estime les risques (une fois n'est pas coutume).

Le critère de Kelly peut être étendu facilement à une distribution binomiale quelconque :

- gain= $w\%$ avec une probabilité p ,
- perte= $l\%$, avec une probabilité $q=1-p$.

$$G(f) = p \log(1 + fw) + q \log(1 - fl)$$

$$f^* = \frac{pw - ql}{wl}$$

$a = pw - ql$ est tout simplement l'espérance arithmétique et

$$G(f^*) = p \log\left(1 + \frac{a}{l}\right) + q \log\left(1 - \frac{a}{w}\right)$$

Cette formulation sera utile pour une utilisation sur les marchés à terme, par exemple, dans le cas d'une stratégie de type "bracket trading", en fixant les niveaux de sortie (profit exit, stop loss).

Dans le cas d'une distribution de rendements iid (discrète ou continue), le problème se pose de la même façon : optimiser le taux de croissance à long terme revient à maximiser l'espérance de l'utilité sur la prochaine période. Prenons le cas d'un investissement dans un actif risque et un actif non risqué (taux sans risque = 0). Soit $\pi(r)$, la densité de probabilité des rendements.

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \log(1 + f(e^r - 1)) \pi(r) dr$$

f^* vérifie :

$$f^* = \operatorname{argmax}_f \int_{-\infty}^{\infty} \log(1 + f(e^r - 1)) \pi(r) dr$$

et solution de :

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^r - 1}{1 + f(e^r - 1)} \pi(r) dr \quad (2)$$

Il est sans doute plus commode d'exprimer ces équations en utilisant le rendement arithmétique, $r_a = e^r - 1$, le , c'est à dire le rendement usuel $\delta\text{prix}/\text{prix}$.

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \log(1 + fr_a) \pi_a(r_a) dr_a$$

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r_a}{1 + fr_a} \pi_a(r_a) dr_a \quad (3)$$

On peut trouver des solutions approchées, par un développement de Taylor de l'équation 3, en supposant que r est suffisamment petit

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{\infty} r_a (1 - fr_a + [fr_a]^2 - [fr_a]^3 + [fr_a]^4) \pi_a(r_a) dr_a \\ &= E(r_a) - fE[r_a^2] + f^2E[r_a^3] - f^3E[r_a^4] + \dots \end{aligned}$$

f^* est donc solution de :

$$M_1 - fM_2 + f^2M_3 - f^3M_4 + \dots = 0 \quad (4)$$

M_i étant le moment d'ordre i du rendement arithmétique.

En se limitant au second ordre, on obtient :

$$f^* \approx \frac{\langle e^r - 1 \rangle}{\langle (e^r - 1)^2 \rangle} \approx \frac{\langle r_a \rangle}{\sigma^2 + \langle r_a \rangle^2}$$

Dans le cas fréquent de $\langle r_a \rangle \ll \sigma$, on aura :

$$f^* \approx \frac{\langle r_a \rangle}{\sigma^2}$$

qui est l'expression dans la limite du continu (cf section Merton [48]).

Les solutions ne sont pas équivalentes lorsque $\langle r_a \rangle$ n'est plus négligeable devant σ .

Dans ces cas, le développement limité n'est plus valide, on devra résoudre l'équation 3 par des méthodes numériques car la solution n'a pas de forme explicite évidente même dans le cas de rendements sont lognormaux.

Si le rendement est du même ordre que la volatilité, le levier est la moitié du levier en continu. Prenons, par exemple le cas d'un actif de rendement espéré annuel $\mu = .2$ et volatilité $\sigma = .2$. En ajustement annuel, le levier, solution exacte de 3, sera de l'ordre de 2.3, alors que l'approximation du continu donne un levier double $\mu/\sigma^2 = 5$, ce qui conduit rapidement à la ruine !

L'approximation de G au second ordre est représentée sur la "parabole" de Kelly (voir 2.1)

$$G(f) \approx \langle r_a \rangle f - \frac{1}{2} \langle r_a^2 \rangle f^2$$

A f optimal, on a

$$G^* = G(f^*) \approx \langle r_a \rangle f^* - \frac{1}{2} \langle r_a^2 \rangle f^{*2} = \frac{1}{2} \frac{\langle r_a \rangle^2}{\langle r_a^2 \rangle}$$

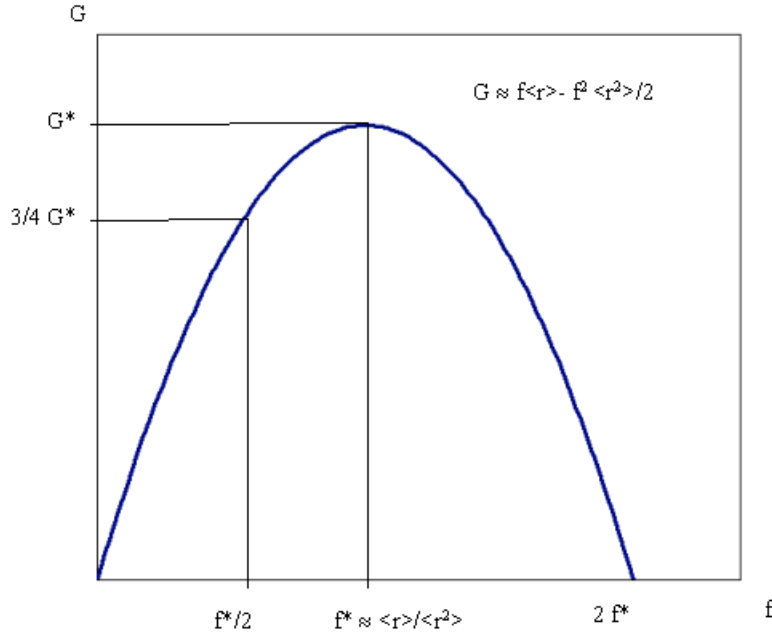


FIG. 1 – Taux de croissance - parabole de Kelly

Cette approximation grossière permet de définir quelques règles simples. Le maximum est bien atteint pour $f^* \approx \frac{\langle r \rangle}{\langle r^2 \rangle}$. Par ailleurs, le taux de croissance est nul pour $f = 0$ ainsi que pour $f = 2 * f^*$ et devient négatif pour $f > 2 * f^*$. Encore une fois une erreur conduisant à une sur-estimation peut être catastrophique. Il vaut mieux sous estimer, par exemple à $f = f^*/2$, le manque à gagner ne sera que de 25% (Thorp [66]).

2.2 Cas multi-actifs

Dans le cas de portefeuilles peu risqués, hypothèse sans doute vraie en variations journalières, le taux de croissance peut être développé au second ordre. Les conditions d'optimalité conduisent alors à résoudre un problème quadratique, identique à l'optimisation de Markowitz, dans le plan espérance variance :

$$G \approx \langle w, \rho \rangle - \frac{\gamma}{2} \langle w, \Gamma w \rangle \quad (5)$$

en notant $\langle . \rangle$, le produit scalaire avec

- $\rho = \mu - r_f$ la moyenne des rendements en excès du rendement sans risque

- w le vecteur des pondérations, sans la pondération dans l'actif sans risque,
- Γ , la matrice de variance/covariance des actifs risqués
- γ , l'aversion relative pour le risque.

(cf [26], chap. 3).

On retrouve ici le cas d'actifs lognormaux iid avec une fonction d'utilité quadratique ... Il est important de remarquer que les hypothèses nécessaires à l'établissement des résultats sont beaucoup plus faibles que celles d'un modèle lognormal.

Les développements ci-après sont totalement empiriques et non paramétriques, il n'est fait aucune hypothèse sur des modèles, nous nous contentons seulement de vérifier des propriétés de la gestion de portefeuille, ainsi que la validité des méthodes de calcul pour les obtenir.

Les hypothèses utiles aux méthodes d'approximation sont basées sur la validité d'un développement limité au second ordre, se trouvant être exact dans le cas lognormal iid et continu, mais en aucun cas le modèle lognormal n'est requis à l'établissement des résultats qui restent donc valides pour une classe bien plus large de processus.

Dans le cas sans contrainte, la solution approchée correspond au portefeuille dit logarithmique :

$$w^* = \Gamma^{-1} \rho$$

Dans le cas d'actifs (ou stratégies) non corrélées, l'investissement optimal est :

$$w_i^* = \frac{r_i - r_{free}}{\sigma_i^2 + r_i^2}$$

2.3 Temps continu

Pour le temps continu, nous ferons appel à Merton [48],

En résumé, on trouve à peu près les mêmes résultats que dans le cas discret, sans qu'il soit nécessaire de faire des hypothèses trop contraignantes les rendements et volatilités qui peuvent dépendre du temps.

Si on considère N titres risqués, vérifiant :

$$\frac{dP_i}{P_i} = \mu_i(t)dt + \sum_j \sigma_{ij}(t)dZ_j \quad i = 1, \dots, N$$

Z_j étant un processus de Wiener.

On cherche les proportions x_i à investir dans les actifs, qui maximisent la richesse au temps T :

$$\max_x E\left[\int_0^T U(t, W(t))dt + A(W(T))\right]$$

Voir Demange-Rochet ([26], p. 263-275) pour plus de détails.

Si l'utilité de la richesse finale est une fonction isoélastique :

$$A(w) = \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

avec $\gamma > 1$. Avec l'utilité logarithmique, dans le cas limite $\gamma = 1$ (voir 2.9)

$$A(w) = \log w$$

On retrouve les mêmes résultats que dans le cas discret et mono périodique, à savoir :

$$x = \frac{1}{\gamma} \Gamma^{-1} \rho \quad (6)$$

avec Γ la matrice de variance-covariance et ρ le vecteur des rendements :

$$\rho_i = \mu_i - r$$

et r le taux sans risque.

Les actifs peuvent être des stratégies. Dans le cas où ces stratégies sont non corrélées (ou faiblement comme l'investissement dans des différents hedge funds utilisant des techniques d'arbitrages sophistiquées), le résultat s'écrit plus simplement :

$$x_i = \frac{\mu_i - r}{\gamma \sigma_i^2}$$

Dans le cas d'un seul actif, l'équation 6 se réduit donc à

$$x = \frac{\mu_t - r}{\gamma \sigma_t^2} \quad (7)$$

Ce résultat est d'autant plus remarquable que toutes ces variables peuvent dépendre du temps.

2.4 Kelly et la fonction d'utilité logarithmique

Nous avons vu que le critère de Kelly revient à maximiser une fonction d'utilité logarithmique.

Dans [59], [25] Sciubba montre que les investisseurs dotés d'une fonction d'utilité en logarithme finissent par ruiner les autres investisseurs qui utilisent le CAPM.

Ce critère ne correspond pas nécessairement à la fonction d'utilité de l'investisseur (Merton et Samuelson [51]). En effet, l'indice d'aversion pour le risque de la fu en log est égale à 1, alors que les indices les plus répandus sont beaucoup plus élevés (par exemple 10). Comme le fait remarquer Sciubba, le logarithme n'est peut être la fonction d'utilité qui vous rendra le plus heureux, mais c'est celle qui vous permettra survivre !

Cependant, comme nous le verrons, la fonction d'utilité logarithme conduit à des portefeuilles dont le niveau de risque est élevé, surtout en terme de perte maximale historique.

2.5 Kelly, autres propriétés remarquables

Toutes ces propositions sont équivalentes :

- maximiser le taux de croissance (Le critère de Kelly)
- maximiser la moyenne géométrique,
- maximiser l'espérance d'une utilité en logarithmique.
- maximiser le portefeuille médian,
- minimiser la durée pour atteindre un objectif,

Il est intéressant de constater que le critère de Kelly revient à maximiser la moyenne géométrique :

$$g = \left(\prod_{i=1,n} W_i/W_{i-1} \right)^{1/n}$$

à comparer à la moyenne arithmétique :

$$a = \frac{1}{n} \sum_{i=1,n} g_i$$

Sous hypothèse de rendements $\ll 1$, on montre facilement par un développement limité que :

$$g \approx a - \frac{\sigma^2}{2}$$

on reconnaît ici les résultats classiques obtenus par lemme d'Ito pour une diffusion lognormale :

$$E(d \log S) = E(dS/S) - E(dS/S)^2/2 = \mu - \sigma^2/2$$

Ce résultat illustre simplement que le taux de croissance (donc la moyenne géométrique) prend en compte les risques.

Kelly est aussi la stratégie qui permet de minimiser la durée nécessaire pour atteindre un objectif (Breiman (1961)[18], Thorp[66]).

Dans le cas Kelly original, il convient de remarquer que l'espérance du portefeuille

$$E(W_n) = E(W_1/W_0)^n W_0 = ((2p - 1)f + 1)^n W_0$$

est constituée de termes exponentiellement grands et fortement improbables, comme on peut le voir sur la figure 2.5.

Par exemple une succession de n gains est peu probable ($proba = p^n$) tandis que le portefeuille correspondant est celui des grains de riz sur l'échiquier ... sa contribution à la moyenne est très grande.

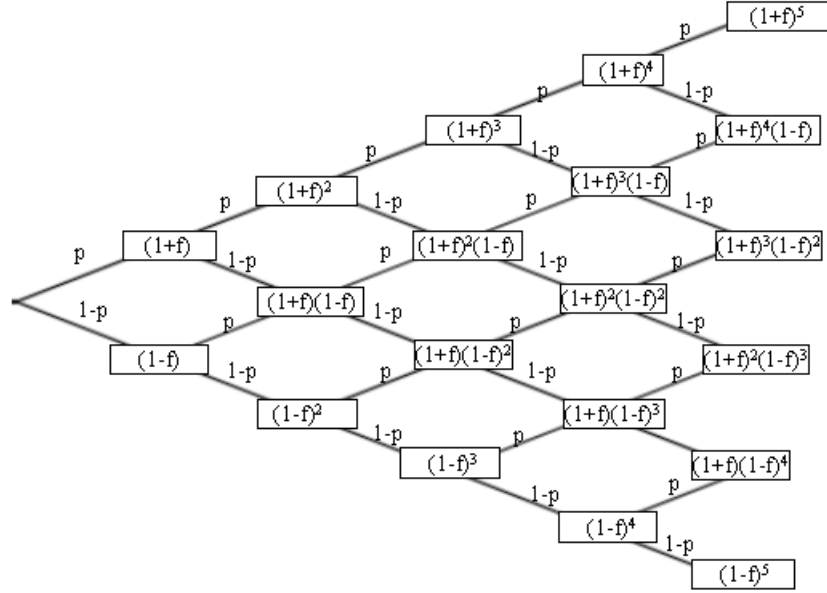


FIG. 2 – Arbre de Kelly

Le portefeuille de Kelly est aussi le portefeuille médian

$$P(ptf \leq Ptf_{median}) = P(ptf \geq Ptf_{median}) = 0.5$$

Si on compare au portefeuille moyen :

$$E(W_n) = Ee^{\log W_n} \gg e^{E(\log W_n)} = Ptf_{median}$$

$$Ee^{\log W_n} \approx 1 + E(\log W_n) + \frac{1}{2}E[\log^2 W_n] + \dots$$

$$e^{E(\log W_n)} \approx 1 + E(\log W_n) + \frac{1}{2}E[\log W_n]^2 + \dots$$

Au premier ordre, on trouve le même résultat, par contre on voit que la moyenne devient exponentiellement plus grande au second ordre.

Le critère de Kelly revient à maximiser la médiane. C'est le point de vue adopté par Maslov et Zhang [50].

Le critère de la médiane apparaît dès lors que le processus de l'actif sous jacent est un processus multiplicatif dont le logarithme est symétrique. Par une simple considération

de symétrie, l'exponentielle de la moyenne du logarithme devient la médiane du processus multiplicatif. Par contre, l'espérance du processus multiplicatif est beaucoup plus grande en raison de contributions exponentiellement grandes et improbables.

Remarques : le sous jacent n'est pas nécessairement un actif, mais tout produit dérivé ou toute stratégie dont le montant investi peut être ajusté facilement. Kelly s'applique au profil de la stratégie, des gains et des pertes .. Un estimateur naïf du levier à partir des pertes et profits conduit tout naturellement à réduire l'exposition en période de pertes, et augmenter les positions en périodes de gains.

Il est essentiel que la stratégie soit divisible. Dans le cas de "quotité" trop grande, imposée ou induite par des coûts de transactions, ou par les effets de leviers sur les marché à terme, par exemple, il convient d'adapter ce type de stratégie et introduire des seuils. Dans le cas de marché future par exemple, les leviers intrinsèques sont déjà tellement élevés que l'adaptation et la discrétisation des positions est délicate. Dans ces cas, on procédera par seuils et arrondis, qui auront forcément un impact sur les résultats et la gestion du risque [39].

L'asymétrie négative constatée sur les prix pourrait nuancer le critère de la médiane. Cependant, cette asymétrie semble négligeable face aux différences entre moyenne et médiane.

2.6 Relation avec le ratio de Sharpe

Pour une diffusion normale, le facteur d'échelle de la volatilité est en $\sigma_t = \sigma t^{1/2}$. Le levier optimal f^* est donc sans dimension temporelle, μ et σ^2 étant proportionnels au temps :

$$f^*(t) = \frac{\mu t}{(\sigma t^{1/2})^2} = f^*$$

$$G(f^*) \approx \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{1}{2} \text{Sharpe}^2$$

Le ratio de Sharpe est propre à la stratégie, il ne dépend pas du levier, rendements et volatilités étant multipliés par le même facteur de levier.

Par contre, il dépend de l'horizon d'investissement. Pour un horizon T (et pour des rendements normaux)

$$\text{Sharpe}(T) = \text{Sharpe} T^{1/2}$$

et

$$G^*(T) = G^* T \approx \frac{1}{2} \text{Sharpe}^2 T$$

Il est d'usage de considérer qu'un bon système doit présenter un ratio de Sharpe de 2, au moins. Prenons par exemple, un Sharpe de 2, avec $\mu = 10\%$, et donc $\sigma = 5\%$. En

suisant l'approche Kelly, le taux de croissance annuel serait donc de $7.39 = exp(2)!$ mais il faudrait aussi user d'un levier de $f^* = 0.1/0.05^2 = 40!!!$ mieux vaut être confiant dans ses estimations! A l'évidence, la stratégie de Kelly semble trop agressive (voir section 2.4) . En pratique on utilisera des leviers moindres, donc des aversions relative pour le risque, γ , plus élevées que celle du logarithme, donc $\gamma \gg 1$.

Dans une stratégie de Kelly, le temps nécessaire pour doubler la richesse sera de l'ordre de :

$$T_2 = \frac{2 \log 2}{Sharpe^2}$$

Avec un Sharpe de 2, ce temps serait de l'ordre de 4 à 5 mois.

Inversement, on peut donc définir un ratio de Sharpe généralisé à partir du taux de croissance (voir Hodges-1998) :

$$GS = \sqrt{\frac{2G^*}{T}}$$

2.7 Vers un arbitrage de la volatilité?

On assimile souvent le critère de Kelly à une technique permettant de "pomper la volatilité".

Nous illustrons ce phénomène, en montrant qu'il est possible de gagner de l'argent sur une action qui en perd, sans vente à découvert.

Prenons le cas simple d'une action dont le cours est multiplié par 2 et divisé par 3, avec une probabilité de 0.5. Il est clair que le cours de cette action décline rapidement : pour n suffisamment grand, la valeur probable du cours de l'action est $P_n = 2^{n/2} \frac{1}{3}^{n/2} = \frac{2^n}{3^n}$ et tend rapidement vers 0.

Examinons de plus près, dans le cadre d'une stratégie de Kelly, avec un levier constant et des réajustements permanents.

A chaque période, on est en présence d'un jeu dans lequel on possède un avantage : gagner $w = 2 - 1 = 1$ ou perdre $l = 1 - 1/3 = 2/3$ du montant parié. L'espérance du gain est $a = pw - ql = 0.5 * 1 - 0.5 * 2/3 = 1/6$, elle est positive, condition sine qua non. On peut appliquer la formule de Kelly dans le cas binomial (vue ci dessus 2.1) : $f^* = \frac{a}{wl} = (1/6)/[1 * (2/3)] = 1/4$. Il faut donc investir 25% du capital à tout instant. Ce faisant, on atteint un taux de croissance de : $G = p \log(1 + f^*w) + q \log(1 - f^*l) = 0.5 \log(25/24)$ Soit 2% environ. Sur 100 périodes, la richesse probable sera multipliée par $e^{100*2\%} = 7.7!!!$ pas si mal pour une action qui converge rapidement vers zéro, sur cette même période le cours de l'action aura probablement été divisé par plus de 1 milliard $(2/3)^{50}!$

On retrouve un résultat analogue pour le cas d'une action qui "va nulle part", un processus log normal sans drift : $d \log S = \sigma dW$. A chaque période, l'espérance de l'incrément reste

positive :

$$dS/S = \sigma^2/2dt + \sigma dW$$

le levier optimal vaut : (cf) :

$$f^* = \frac{\mu}{\sigma^2} = 0.5$$

et le taux de croissance :

$$G^* \approx \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{8}$$

On gagne donc de la volatilité ... Plus la volatilité est élevée et meilleur est le taux de croissance, d'où l'expression de "pompe à volatilité".

Prenons, le cas d'une action dont la volatilité est de 40%, le taux de croissance sera de 2%, pas si mal.

Si on utilise cette technique en se portant sur des actions très volatiles, comme on peut en trouver sur le NASDAQ, les résultats sont spectaculaires. Avec une volatilité de 20% par jour le taux de croissance journalier est de 0.5% par jour, soit 450% par an évidemment, dans ces cas extrêmes, d'autres problèmes peuvent se poser, tels que des problèmes de liquidité ou des risques de défaillance ("survivor bias").

On peut sans doute rapprocher cette technique d'une stratégie dite de "mean reversion" qui consiste à acheter les "perdants" et vendre les "gagnants" [44]. Mais on ne doit pas confondre les deux techniques : la "pompe à volatilité" fonctionne sous hypothèse iid, il n'est pas utile ici d'invoquer une quelconque dépendance temporelle pour "capturer" des excès de volatilité, ce n'est pas la même chose qu'une stratégie basée sur un retour à la moyenne qui suppose un processus auto-régressif.

Si ces techniques permettent d'atteindre des rendements "anormaux", c'est que la volatilité est elle-même anormale.

Les volatilités sont excessives : sur un actif, la volatilité ne peut pas être expliquée par la seule incertitude sur les fondamentaux, voir Shiller [60] [61]. Il en va de même pour les corrélations entre actifs [46].

Les méthodes que nous décrivons sont peut-être une réponse possible "aux arbitrages de volatilité", voir, par exemple, http://www.institut-europlace.com/files/2003_panel_3_dumas.pdf. Comme le dit si bien Cover, si ces techniques sont généralisées, nous pourrions observer une baisse généralisée de la volatilité, ce qui serait bénéfique au coût du capital pour le financement des entreprises.

2.8 Kelly et l'efficience des marchés

Le critère de Kelly, ou plus généralement les propriétés des portefeuilles CRP (Constant Rebalanced Portfolio) sont établies avec des hypothèses de marché efficient (EMH).

Le fait que l'on puisse battre la meilleure action et tout indice sous l'hypothèse la plus forte de l'EMH est assez troublant ...

Rappelons tout d'abord quelques propriétés relatives à l'Hypothèse des Marchés Efficients (EMH), sa justification et propriétés statistiques :

- absence d'autocorrélation temporelle,
- indépendances des rendements,
- rendements lognormaux.

Tout d'abord, l'EMH nous dit que les historiques ne sont pas très utiles pour effectuer de meilleure prédiction que celle que l'on peut faire en utilisant le dernier cours coté. Autrement dit, les prix ne présentent pas de dépendances simples et exploitables de manière systématique. Les autocorrélations temporelles semblent ne pas exister de manière significative. D'où l'hypothèse d'indépendance des rendements. Cette hypothèse est évidemment trop forte, mais pour qui utiliserait des méthodes linéaires, il n'y aurait pas vraiment de différence. Donc l'hypothèse IID semble raisonnable.

Le fait que les rendements sont IID ne nous dit rien sur cette distribution. Il peuvent être à queues épaisses, avec des relations de co-dépendances transversales (cross sectional) complexes. Là encore la plupart des résultats de l'EMH sont établis avec des rendements lognormaux. Rappelons que cette hypothèse vient naturellement, par application du théorème central limite, le logarithme du prix à un instant donné étant la somme des rendements, variables aléatoires indépendantes (hypothèse précédente).

Même dans le cas le moins restrictif, il est possible de trouver des stratégies qui vont approcher le meilleur taux de croissance possible. Ce principe s'applique, aussi et en particulier, dans le cas de rendements IID, a fortiori dans le cas IID lognormal. Et même sous l'hypothèse la plus classique, lognormal IID, une gestion active de rebalancing permet donc de battre le marché, ce qui semble être une contradiction même avec la définition d'un marché efficient.

Examinons les conditions pour qu'il en soit différemment, autrement dit qu'elles seraient les conditions d'équivalence entre un portefeuille CRP de Kelly et une stratégie Buy & Hold ? Nous parlons ici de relation d'équivalence et non de relation de non arbitrage, car la relation dépend aussi de l'aversion au risque, égale à 1 dans le cas de Kelly.

Prenons le cas d'un seul actif risqué. Le seul cas d'équivalence correspond à levier égal ou proche (si on tient compte des coûts de transaction) de 1. Dans tous les autres cas, il est possible de battre l'actif (ou l'indice) en utilisant une stratégie optimale de réajustement.

La relation d'équivalence impliquerait donc :

$$\begin{aligned} (\mu - r_f)/\sigma^2 &\simeq 1 \\ \mu &\simeq \sigma^2 + r_f \end{aligned}$$

σ^2 étant une prime de risque. avec une volatilité de l'ordre de 30% et $r_{free} = 4\%$, le rendement

attendu serait de l'ordre de 13%, ce qui correspond aux ordres de grandeurs des rendements d'une action, bien que excessif, comparé aux rendements des bénéfices nets par action.

Si on compare aux leviers ex post mesurés sur les actions, on trouve un levier rétrospectif largement supérieur à 1. Par exemple, sur le marché US, les $(\mu - r_f)/\sigma^2$ sont :

	^DJI	AA	AXP	BA	C	CAT	DD	DIS	EK	GE
	4.133	2.247	1.555	1.240	2.531	1.992	1.750	1.327	0.739	3.457
GM	HD	HON	HPQ	IBM	INTC	IP	JNJ	JPM	KO	MCD
1.012	2.081	1.719	1.246	1.921	1.562	1.497	3.569	1.290	2.697	1.781
MMM	MO	MRK	MSFT	PG	SBC	T	UTX	WMT	XOM	
3.502	2.414	2.706	2.360	2.988	2.331	-0.196	3.194	2.164	4.227	

On constate que le ratio le plus élevé est celui de l'indice, l'indice présentant la meilleure attractivité en terme de rendement/risque.

En réalité, si on cherche une équivalence entre une stratégie active et une stratégie de B&H, on doit considérer l'aversion au risque γ_0 , telle que :

$$\frac{1}{\gamma_0} \frac{\mu - r_f}{\sigma^2} = 1$$

soit

$$\gamma_0 = \frac{\mu - r_f}{\sigma^2}$$

Le levier $(\mu - r_f)/\sigma^2$ donne donc directement l'aversion au risque d'équivalence entre une gestion active et une gestion passive.

Par exemple, sur le DJI, l'équivalence entre une gestion active et une gestion passive est obtenue pour une aversion au risque de 4.13. Elle est de 2.36 pour Microsoft.

2.9 Kelly fractionnel

De manière générale, le Kelly fractionnel, consiste à se placer à une fraction δ du levier de Kelly. Le Kelly fractionnel correspond à une fonction d'utilité moins agressive en puissance :

$$U(w) = \frac{w^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

On retrouve le critère de Kelly et l'utilité logarithmique dans le cas limite $\gamma = 1$ L'utilité est invariante par translation, on peut écrire la fonction d'utilité sous la forme $((w^{1-\gamma} - 1)/(1 - \gamma)) = \exp(\log(w)(1 - \gamma)) - 1)/(1 - \gamma) \rightarrow \log w$ lorsque $\gamma \rightarrow 1$

On peut mettre $W(t)$ sous la forme $W(t) = \exp \log W(t)$ puis $1/(1 - \gamma)W(t)^{1-\gamma} = 1/(1 - \gamma) \exp(\log W(t)(1 - \gamma))$ puis par un développement limité classique de l'espérance de la fonction d'utilité autour de $E \log W$

$$\frac{1}{(1 - \gamma)} \log EW(t)^{1-\gamma} \approx E \log W(t) - \frac{\gamma - 1}{2} \text{var}(\log W(t)) + 0(\gamma^2)$$

Dans le cas d'un brownien géométrique, de paramètre μ et σ $\log W(t)$ est un normalement distribué, le critère à optimiser se réduit à :

$$G_\gamma = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{\gamma - 1}{2}\sigma^2 = \mu - \frac{\gamma}{2}\sigma^2$$

Si on investit une proportion constante f dans l'actif risqué, alors la richesse est un brownien géométrique de paramètre μf et σf et

$$G_\gamma = \mu f - \frac{\gamma}{2}\sigma^2 f^2$$

Le maximum est obtenu pour

$$f^*_\gamma = \frac{\mu}{\gamma\sigma^2}$$

Au lieu de maximiser le logarithme, on pourra chercher directement f^*_γ qui maximise :

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(1 + fr)\pi(r)dr$$

$$G^*_\gamma = (2/\gamma - 1/\gamma^2)G^*$$

$G^*_\gamma \approx 2G^*/\gamma$, pour γ grand.

De manière générale, si γ est l'indice d'aversion pour le risque, dans le cas où la richesse suit un processus log normal, le levier optimal est :

$$f^*_\gamma = \frac{1}{\gamma} \frac{\mu}{\sigma^2} = \frac{f^*}{\gamma}$$

avec f^* , le levier optimal pour une fonction d'utilité logarithme, et G^* la croissance correspondante.

γ	utilité	G^*_δ	levier optimal
1	$\log w$	G^*	f^*
2	$-1/w$	$0.75G^*$	$f^*/2$
3	$-1/w^2$	$5/9G^*$	$f^*/3$
4	$-1/w^3$	$7/16G^*$	$f^*/4$

2.10 Perte maximale historique

Un drawdown est par définition, la perte maximale historique depuis le dernier plus haut. Par exemple dans la figure 2.10, les drawdowns successifs sont : $D1 = A - B$, $D2 = C - D$, $D3 = C - F$, $D4 = C - H$

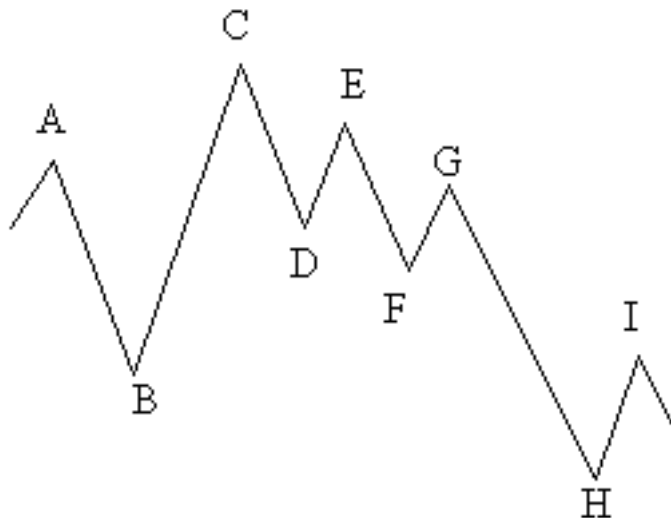


FIG. 3 – Exemple drawdowns

La distribution des drawdowns dans une stratégie de type Kelly a été étudiée par Maslov et Zhang [54].

Soit $W(t)$ la richesse au temps t , $W_{max}(t)$, le maximum depuis un temps origine $t = 1$

$$W_{max}(t) = \max_{t' \leq t} W(t')$$

Le drawdown courant $D(t)$ est défini par :

$$D(t) = W_{max}(t)/W(t)$$

en particulier, $D(t) \geq 1$

Si on mesure le drawdown en %,

$$D_{percent}(t) = \frac{W_{max} - W(t)}{W_{max}} = 1 - \frac{1}{D(t)}$$

$$D(t) = \frac{1}{1 - D_{percent}(t)}$$

Nous allons nous intéresser qu'aux portefeuilles dont la croissance est positive. Dans le cas contraire, il est clair le drawdown n'est pas stationnaire.

Le capital suit une processus multiplicatif :

$$W(t + 1) = e^{\eta(t)}W(t)$$

avec $\eta(t)$ étant issu d'une variable aléatoire $\pi(\eta)$.

On peut démontrer (cf Maslov et Zhang [54], p 2 et [16], p101, voir aussi Feller, vol II, p. 404) que la distribution des drawdowns suit une loi puissance,

$$P(D > y) \sim y^{-\Gamma}$$

ou

$$P(\log D > x) \sim \exp(-\Gamma x)$$

la densité des drawdowns a un exposant $\tau = \Gamma + 1$

$$dP(D) \sim y^{-\tau} dD$$

Γ est solution de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\eta) \exp(-\Gamma \eta) d\eta = 1.$$

Considérons tout d'abord une distribution binomiale, avec $\eta = \ln \Lambda$ avec une probabilité $p > 1/2$, et $\eta = -\ln \Lambda$ avec une probabilité $1 - p$. En d'autres termes, le capital est multiplié par $\Lambda > 1$ avec une probabilité p et divisé par Λ avec une probabilité $1 - p$. Pour cette distribution l'équation se réduit à $p/y + (1 - p)y = 1$, avec $y = \Lambda^\Gamma$. Cette équation possède deux solutions $y_1 = 1$ et $y_2 = p/(1 - p)$. Pour $p > 1/2$ (condition de drift positif) la seconde solution donne le résultat :

$$\Gamma_{\text{binomial}} = \frac{\ln p - \ln(1 - p)}{\ln \Lambda}.$$

Considérons maintenant le cas de $\pi(\eta)$ gaussien.

$$\pi(\eta) = \left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\sigma\right) \exp\left(-\frac{(\eta - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

L'équation 2.10 peut s'écrire sous la forme : $\exp(-\Gamma(\mu - \Gamma\sigma^2/2)) = 1$. La solution unique non triviale ($\Gamma \neq 0$) est donnée par

$$\Gamma_{\text{gaussien}} = \frac{2\mu}{\sigma^2}$$

est positif, pourvu que μ soit > 0 , c'est à dire que la marche aléatoire a un drift positif.

Dans le cas d'une distribution exponentielle pour l'actif risqué, Bouchaud donne une approximation ([16] p. 102). Magdon-Ismail et Al. [49] donnent une expression explicite de la distribution des pertes maximales dans le cas d'un brownien.

Considérons maintenant un investissement de type Kelly, c'est à dire, en investissant une proportion constante f dans l'actif risqué :

$$W(t+1) = W(t) (1 - f + fe^{\eta(t)}).$$

avec $\eta(t)$ est la variable aléatoire décrivant les fluctuations multiplicatives du prix $p(t)$ de l'actif :

$$p(t+1) = p(t)e^{\eta(t)}.$$

La richesse W_t est alors un processus multiplicatif

$$W(t+1) = W(t)e^{\eta_f(t)}$$

avec

$$\eta_f = \ln(1 - f + fe^\eta)$$

Plus f est élevé et plus les fluctuations de l'actif sont amplifiées. Il est clair qu'un investisseur peut réduire le risque de drawdown en sélectionnant un levier f faible : Γ_f est une fonction décroissante de f .

Prenons le cas d'un prix lognormal avec drift μ et une dispersion σ^2 .

Dans ce cas, nous avons vu que le capital suit une loi lognormale : le logarithme du capital a un drift μ_f et une dispersion σ_f^2 donnés par :

$$\begin{aligned} \mu_f &= \mu f - \frac{\sigma^2 f^2}{2} \\ \sigma_f^2 &= \sigma^2 f^2 \end{aligned}$$

L'exposant de la loi puissance des drawdowns $P(D)$ est $\tau_f = \Gamma_f + 1 = 2\mu_f/\sigma_f^2 + 1$,

$$\tau_f^{\text{gaussien}} = \frac{2\mu}{\sigma^2 f}$$

Plus cet exposant est élevé et plus l'investissement est "sûr" contre des drawdowns importants.

La stratégie de Kelly est celle qui maximise le taux de croissance à long terme, en cherchant le maximum du drift μ_f .

Pour $\pi(\eta)$ gaussien, le levier optimal de Kelly f^* est donné par

$$f^* = \frac{\mu}{\sigma^2}$$

Au niveau des drawdowns,

$$\tau_{f^*} = 2.$$

Ce qui signifie que l'espérance des drawdowns est sur le point de diverger ...

Ce résultat n'est pas spécifique à une distribution gaussienne $\pi(\eta)$. On peut généraliser à une distribution quelconque [54] : la stratégie de Kelly maximise le taux de croissance du logarithme du capital, donné par $\mu_f = \langle \ln(1 - f + fe^\eta) \rangle$ et donc f^* solution de :

$$\begin{aligned} 0 &= \partial \mu_f / \partial f |_{f^*} \\ &= \langle (e^\eta - 1) / (1 - f^* + f^* e^\eta) \rangle \\ &= \langle f^* [e^\eta - 1] / (1 - f^* + f^* e^\eta) \rangle / f^* \\ &= \langle [(-f^* + f^* e^\eta)] / (1 - f^* + f^* e^\eta) \rangle / f^* \\ &= \langle [(1 - f^* + f^* e^\eta) - 1] / (1 - f^* + f^* e^\eta) \rangle / f^* \\ &= (1 - \langle (1 - f^* + f^* e^\eta)^{-1} \rangle) / f^* \\ \langle e^{-\eta f} \rangle &= \langle e^{-\ln(1 - f^* + f^* e^\eta)} \rangle \\ &= \langle (1 - f^* + f^* e^\eta)^{-1} \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

i.e. Il est clair que :

$$\Gamma_{f^*} = 1$$

est solution de 2.10

$$\tau_{f^*} = \Gamma_{f^*} + 1 = 2$$

Ce qui prouve que pour une distribution arbitraire du prix de l'actif $\pi(\eta)$, et une stratégie de Kelly, la loi puissance des drawdowns à un exposant $\tau_{f^*} = 2$: tous les moments sont infinis, espérance, variance, etc ...

Si on utilise un Kelly fractionnel, l'exposant devient :

$$\tau_{\delta f^*} = \frac{2}{\delta}$$

Par exemple, pour un $\delta = 0.5$ $\tau_{f^*/2} = 4$

La table suivante donne une idée des probabilités des drawdowns en fonction de Γ (= $\tau - 1$).

Par exemple, pour $\tau = 2$, l'exposant correspondant à Kelly, $P(D > 50\%) \sim 50\%!!!$

Pour $\tau = 4$, l'exposant correspond à *Kelly/2* $P(D > 50\%) \sim 12.5\%$. Une perte de 50% correspond à un capital divisé par 2 depuis le plus haut historique.

2 RAPPEL DU CRITÈRE DE KELLY, PROPRIÉTÉS REMARQUABLES

P(D > drawdown)									
DD%		10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%
DD=Wmax/W		1.11	1.25	1.43	1.67	2.00	2.50	3.33	5.00
tau	2	0.9000	0.8000	0.7000	0.6000	0.5000	0.4000	0.3000	0.2000
	3	0.8100	0.6400	0.4900	0.3600	0.2500	0.1600	0.0900	0.0400
	4	0.7290	0.5120	0.3430	0.2160	0.1250	0.0640	0.0270	0.0080
	5	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0016
	6	0.5905	0.3277	0.1681	0.0778	0.0313	0.0102	0.0024	0.0003
	7	0.5314	0.2621	0.1176	0.0467	0.0156	0.0041	0.0007	0.0001
	8	0.4783	0.2097	0.0824	0.0280	0.0078	0.0016	0.0002	0.0000
	9	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000

FIG. 4 – Taux de croissance - Kelly

On peut ainsi définir une cohérence entre différents paramètres d'une gestion. Exemple, pour des exigences de gestion de 30% par an, et 10% de drawdown maximum. On peut retrouver l'exposant des drawdowns, par

$$\tau = 1 + \frac{\log \alpha}{\log(1 - D_{percent})}$$

avec α le seuil de confiance.

Dans l'exemple, ci dessus, on doit avoir $\tau > 29.43 = 1 + \log(0.05)/\log(1 - 0.1)$ (rappel $D_{ratio} = 1/(1 - D_{percent})$).

S'agissant d'un fond dont les fluctuations sont gaussiennes, on doit avoir une volatilité σ qui vérifie $\tau = 2(m + \sigma^2/2)/\sigma^2$, avec m le rendement moyen, soit

$$\sigma = \left(\frac{2m}{\tau - 1} \right)^{1/2}$$

avec $m = 0.3$ et $\tau > 29.43$, on doit avoir $\sigma < 0.145$, soit un ratio de Sharpe > 2.07 .

Si une stratégie de type Kelly est utilisée, et avec $\tau \sim 30$, le levier doit être défini à $f^* \sim 1/15$

On retrouve également Kelly dans les critères de minimisation des pertes historiques (maximum drawdowns) : le critère de maximum drawdown est au moins aussi important que d'autres critères, tels que le ratio de Sharpe, ou celui du maximum d'une fonction d'utilité.

Dans [32] Grossman et Zhou posent le problème de l'investissement optimal en terme de drawdowns admissibles. Si X^* représente la richesse, on recherche les stratégies telles que :

$$X^*(t) > \alpha \max_{0 \leq s \leq t} X^*(s) \forall 0 \leq t < \infty \quad (8)$$

qui garantissent que la richesse ne sera jamais (presque sûrement, ie avec une probabilité nulle) inférieure à $100\alpha\%$. Sous la contrainte , et avec l'objectif est de maximiser le taux de croissance la stratégie consiste à investir une fraction constante dans les actifs risqués et proportionnelle à $X^*(t) - \alpha \max_{0 \leq s \leq t} X^*(s)$: l'exposition sera réduite au fur et à mesure que l'on atteint le niveau de drawdown admissible, se traduisant ainsi par une stratégie prudente. Inversement, lorsque le niveau atteint est largement supérieur au drawdown admissible, on pourra se permettre des engagements plus élevés.

Dans [17], Pliska et Bielecki proposent une mesure du risque généralisant le critère de Kelly considère une stratégie qui consiste à maximiser la limite inférieure du taux de croissance de l'utilité.

$$J_\gamma = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t(1-\gamma)} \log EW(t)^{1-\gamma}$$

A titre d'exemple, les auteurs donnent une solution explicite dans le cas de 3 actifs, avec un modèle de type Vasicek pour le taux sans risque.

La recherche du maximum de ce taux de croissance dans le pire cas pourra être comparé aux stratégies compétitives de Cover.

2.11 Queues épaisses

Les pertes et queues de distribution ont une influence considérable sur le levier.

Dans le cas d'une distribution discrète, nous avons vu que le levier optimal est nécessairement inférieur à l'inverse de la perte maximale.

$$f^* < \frac{1}{\text{perteMaximale}}$$

Sous estimer cette perte maximale peut avoir des conséquences graves. On comprend mieux l'importance d'une bonne estimation des pertes maximales.

Il convient donc de caractériser le profil des gains et des pertes.

Dans le cas d'une distribution quelconque, discrète ou continue, nous avons donné une approximation du levier, en fonction des moments : f^* est solution de :

$$M_1 - fM_2 + f^2M_3 - f^3M_4 + \dots = 0 \quad (9)$$

dont une solution approchée est :

$$f^* \approx \frac{M1}{M2} + \frac{M1^2}{M2^2}M3 - \frac{M1^3}{M2^3}M4 + O(f^4)$$

Le levier optimal est donc d'autant plus faible que l'asymétrie est négative et la kurtosis élevée, deux faits stylisés connus qui vont contribuer à détériorer les performances. Encore une fois, l'utilisation d'un modèle gaussien est trop "optimiste", pouvant conduire à prendre des leviers trop importants, et donc un risque de décroissance rapide du capital.

On voit donc que le critère de Kelly est tout a fait pertinent dans la prise en compte des risques, non seulement en terme de volatilité, mais aussi de queues anormalement épaisses ou d'asymétries négatives.

Dans le cas d'une distribution dont la queue se comporte comme

$$\pi(u) \sim \beta u^{-1-\nu} \text{ pour } u \gg 1$$

Baviera [7] donne une approximation analogue du levier optimal :

$$f^* \approx \left(\frac{\mu\nu(\nu - 1)}{\beta} \right)^{\frac{1}{\nu-1}}$$

3 Ajustements dynamiques et coûts de transactions

Tous les résultats énoncés jusqu'à présent supposent des hypothèses irréalistes :

- le portefeuille est ajusté en permanence, à tout instant pour satisfaire l'équation 6
- pas de coût de transaction.
- hypothèse de diffusion log-normale (tempéré par le fait que les paramètres μ et σ peuvent varier avec le temps).

Nous examinons les adaptations nécessaires dans le cas où ces hypothèses ne sont pas respectées.

3.1 Ajustements dynamiques

Les stratégies de type Kelly ou sa généralisation en temps continu nécessite des ajustements permanents. En effet pour maintenir constant une proportion fixe, on doit ajuster le nombre de titres détenus en fonction des variations. Nous allons voir comment.

Supposons qu'on détienne un portefeuille d'une valeur 1000 avec seul actif risqué de valeur unitaire 10, avec un levier de 4. On détient donc $400 = (1000/10) \times 4$ unités de l'actif. Le mois suivant, l'actif perd 20%, l'actif passe à 80. Le levier étant de 4, la perte en capital est quatre

fois plus importante, la valeur du portefeuille devient $3200 = 400 \times 80!!!$ Pour maintenir un levier constant de 4, il donc faut ajuster le nombre d'unités en fonction des nouvelles valeurs du portefeuille (3200) et l'actif 80, soit un nombre d'unités $160 = (3200/80) \times 4$, il faut donc alléger de $400 - 160$ unités.

On voit donc que ce type de stratégie impose de s'ajuster en fonction des variations des actifs.

Examinons dans un cas plus général.

Soit f la proportion fixe. Au temps t , la valeur du portefeuille est W_t et celle de l'actif est S_t . La quantité détenue à tout instant t doit vérifier : $q_t S_t = f W_t$.

À la période suivante, $t + 1$, l'actif vaut S_{t+1}

La valeur du portefeuille devient :

$$W_{t+1} = (1 - f)W_t + q_t S_{t+1} = (1 + f \frac{\Delta S}{S}) W_t$$

donc en simplifiant les notations :

$$\frac{\Delta W}{W} = f \frac{\Delta S}{S}$$

Donc la proportion $f = W/qS$ en actif risqué devient :

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta W}{W} - \frac{\Delta S}{S}$$

et donc

$$\Delta f \approx f(1 - f) \frac{\delta S}{S}$$

Il faut donc rééquilibrer, car la proportion en actif risqué a changé ; vu autrement, il faut ajuster le cash en fonction de la variation de l'actif risqué.

Pour maintenir une proportion constante f en actif risqué, il faut détenir une quantité q_{t+1} vérifiant :

$$q_{t+1} S_{t+1} = f W_{t+1}$$

donc :

$$\frac{q_{t+1} - q_t}{q_t} = (f - 1) \frac{S_{t+1} - S_t}{S_{t+1}}$$

$$\frac{\delta q}{q} \approx (f - 1) \frac{\delta S}{S}$$

Plusieurs cas en fonction de f :

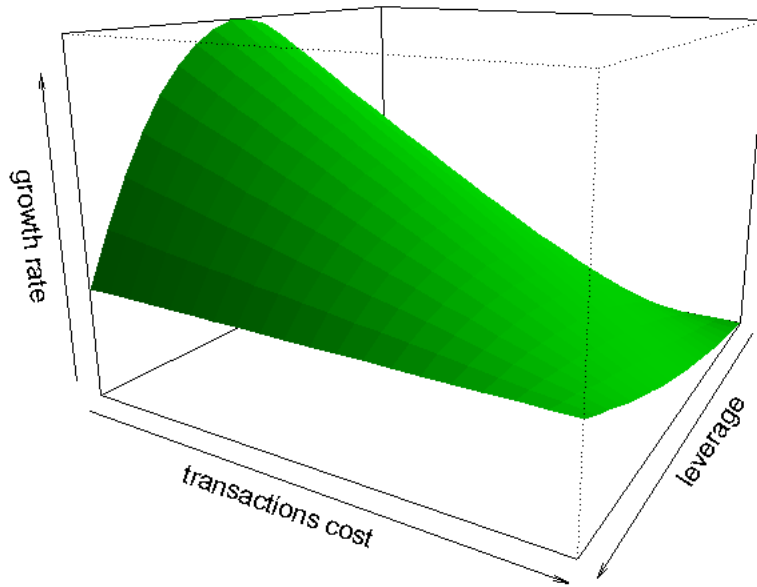
- $f < 1$: on doit ajuster en sens inverse de la variation : acheter lorsque l'actif baisse, vendre lorsque l'actif est en hausse. On pourrait penser qu'il s'agit d'une stratégie contrarienne, ou dite de "moyenne à la baisse" ? Il y a un peu de cela. On pourrait interpréter en disant que cet investisseur est prudent : il prend ses bénéfices lorsque le marché monte et achète lorsqu'il baisse.
- $f > 1$: on est suiveur : on doit acheter lorsque l'actif monte et vendre lorsqu'il baisse.
- $f = 1$: on est investi à 100% dans l'actif risqué, et on le restera même en cas de hausse ou de baisse de l'actif.

Dans ce cas, les règles de réajustements ne sont plus aussi simples, car on peut avoir une baisse combinée de la valeur des actifs sans que cela touche la proportion dans le portefeuille de manière significative, d'autant plus qu'il faut tenir compte des coûts de transaction.

3.2 Coûts de transactions

La gestion de portefeuille en présence de frictions a fait l'objet de nombreuses études : Leland [43] détermine des zones de non trading pour une gestion à pondérations constantes en trouvant les solution d'un problème de contrôle optimal stochastique, Aurell & Al. [3] donne la forme analytique dans le cas d'un seul actif. L'optimisation de fonction d'utilité avec coûts de transactions est également un problème classique, citons entre autres : Pliska [56], Mitchell [47]. Enfin, [37] Iyengar généralise le résultats pour les portefeuilles universels en présence de coûts de transactions.

En pratique, on voit donc que les coûts peuvent avoir un impact important sur la gestion active. La figure suivante illustre la forme de ces pénalités, sur le CAC40, en fonction du levier f et du niveau des coûts :



Le taux de croissance diminue d'autant plus que les coûts sont élevés, la détérioration est d'autant plus accentuée que f se trouve proche de 0.5, confirmé par le facteur en $f(1 - f)$ dans l'expression ??.

L'avantage des stratégies s'estompe avec des coûts élevés, et la meilleure stratégie devient le Buy & Hold.

Les coûts affectent directement le taux de croissance, on peut montrer que :

$$G \approx fE(r) - |f(1 - f)|cE|r| - f^2\sigma^2/2$$

Le terme dû aux coûts de transactions dépend aussi de $E|r|$, donc de la volatilité.

En présence de coûts, la détérioration sera d'autant plus importante que la volatilité sera grande.

En considérant les rendements journaliers comme quasi nuls (devant la volatilité),

$$E|r| \approx \sqrt{2/\pi}\sigma$$

Pour le levier de Kelly $f^* = E(r)/\sigma^2$, on aura :

$$G^* \approx \frac{1}{2} \frac{\langle r \rangle^2}{\sigma^2} - \sqrt{2/\pi c} |f^*(1 - f^*)| \sigma$$

Le premier terme correspond au taux de croissance sans coûts de transactions, il croit de manière linéaire avec l'intervalle de temps considéré. En revanche, le second terme, dû aux coûts, est décroissant avec la racine carré du temps, autrement dit ce terme peut devenir très grand lorsque on augmente la fréquence des réajustements (voire infini, dans la limite du continu).

On aura donc intérêt à réduire la fréquence des ajustements. D'un autre côté, si on n'effectue les ajustements que trop rarement, on ne bénéficie plus des performances issues du "rebalancing", d'où cette fameuse zone de non trading. (Attention, le taux de croissance n'est plus linéaire que par applications de développements limités au second ordre, ces développements ne sont plus valides pour un intervalle trop large)

En pratique, il n'est donc pas souhaitable d'effectuer les réajustements en permanence et il existe un optimum entre trop réajuster et ne pas réajuster.

Leland [43] résout le problème par des méthodes de contrôle optimal stochastique, en cherchant à minimiser les coûts dans une stratégie de type CRP. Leland trouve des intervalles dits de "non trading", centrés sur les pondérations cibles. Tant que la pondération reste dans cette zone, il sera inutile de réajuster. Le réajustement n'aura lieu que lorsque la pondération sort de l'intervalle. Dans ce cas, on doit ramener la pondération dans l'intervalle, à la borne la plus proche de la pondération constatée.

Leland dérive de nombreuses conclusions :

- (i) La taille de l'intervalle de non trading ($w_{max} - w_{min}$) est proportionnelle à la racine cubique des coûts de transaction.
- (ii) Le volume de transactions (turnover) et la largeur de la zone de non trading sont inversement proportionnels, ce qui implique que le turnover est inversement proportionnel à la racine cubique des coûts de transactions.
- (iii) L'écart type de l'erreur de tracking et la largeur de la zone de non trading sont proportionnels.

Pour avoir une idée de la fréquence de réajustement, Leland donne l'exemple suivant. Considérons un actif risqué $\mu = .125$ et $\sigma = .2$, un taux sans risque $r = .075$ et une proportion cible $f^* = .6$. Avec des coûts de 0.5%, la zone de non trading se situe dans l'intervalle $[0.533, 0.655]$, c'est à dire lorsque l'actif varie de 10% environ.

De la même façon, Aurell & Al. [3] étudient cette même question et donnent une forme analytique pour l'intervalle de non trading dans une stratégie de type Kelly avec un actif risqué lognormal. Si c représente les coûts de transaction proportionnels, l'intervalle de non

trading est centré autour de $f = \frac{\mu}{\sigma^2}$, avec

$$\Delta f \approx \left(12c \left(\frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 \left(1 - \frac{\mu}{\sigma^2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \quad c \text{ petit}$$

On retrouve bien les mêmes relations que dans l'article de Leland, à savoir que la largeur de l'intervalle est proportionnelle à la racine cubique du coût de transaction.

Lorsque μ/σ^2 est proche de zéro ou un, la largeur de l'intervalle est proche de zéro, ce qui est normal dans la mesure où on est investi quasi entièrement en cash ou en actif risqué. En revanche, lorsque μ/σ^2 est proche de 0.5, l'intervalle de non trading devient maximal et proche de $0.9 c^{\frac{1}{3}}$ environ. Pour des valeurs réalistes de c , cet intervalle est relativement large :

c	Δl
0.1%	9%
0.2%	11%
0.3%	13%
0.4%	14%
0.5%	15%
0.6%	16%
0.7%	17%
0.8%	18%
0.9%	19%
1%	19%

Par exemple avec des coûts de 1% , on ne doit réajuster que si la proportion passe sous les 40% ou dépasse les 60%. Pour un actif qui varie de 1% par jour, le fréquence typique est de de 800 jours de trading!!! Si à l'inverse, le coût de transaction devient quasi nul, disons 10^{-6} , l'intervalle tombe à 1%; la fréquence se mesure en nombre de jours. Cela dit, même avec des coûts ridiculement bas, on est encore loin du réajustement en continu dans les hypothèses de l'allocation inter temporelle de Merton.

D'autres auteurs ont abordé ce même problème : Baviera [68] avec une approche intéressante dite de delta trading, Pliska [56] pour des coûts de transaction proportionnels et absolus, Mitchell [47], avec une approche plus simple dans un cadre plus classique d'espérance-variance et optimisation quadratique.

Remarque : les proportions optimales w^* correspondent au maximum du taux de croissance.

$$\frac{\partial G(w)}{\partial w_i}(w^*) = 0$$

En conséquence, une faible variation des pondérations n'aura qu'un impact du second ordre sur G^* :

$$\Delta G(w) = O(\Delta w^2) \text{ pour } w \approx w^*$$

ce qui est une bonne nouvelle, minimise l'impact des coûts de transaction sur le taux de croissance, tout en réduisant la fréquence des réajustements.

4 Estimation du taux de croissance

On se propose ici d'estimer les paramètres de levier optimal.

On peut utiliser plusieurs méthodes. Tout d'abord estimer les paramètres de rendement et volatilité, et se ramener à des problèmes classiques.

Cependant, l'estimation du drift se révèle délicate et imprécise sur des intervalles de temps trop courts, qui sont des problèmes bien connus dans les estimation des paramètres d'une diffusion, notamment pour les taux d'intérêt [64].

Prenons le cas d'un actif avec un rendement de 5% et volatilité de 20%. l'intervalle de confiance théorique sera de l'ordre de $5\% \pm 1.64 \times 20\%$!!!

On peut aussi estimer directement le levier.

Dans le cas d'un seul actif, on peut résoudre l'équation ??.

En réalité, nous verrons que cette méthode n'est pas satisfaisante, en ce sens qu'elle n'est pas universelle (en gros, une méthode est dite universelle si elle fonctionne pour une série arbitraire et garantie le meilleur taux de croissance presque sûrement).

Il est également essentiel de pouvoir estimer l'erreur sur cette estimation.

Baviera [7] évalue les intervalles de confiance par la méthode du bootstrap.

Comme l'indique Baviera, dans le cas de faible volatilité, l'estimation du levier est très sensible aux variations dans la distribution. L'erreur est en $1/\sigma$ et conduit à résultat qui peut paraître contre intuitif : il est préférable d'appliquer Kelly à des actifs volatils. Dans le cas d'un actif à forte variance, le levier sera plus faible, et de fortes variations dans la distribution n'affecteront que faiblement ce levier. L'estimation est donc d'autant plus fiable que l'actif est volatil.

Dans le cas d'un actif avec une faible volatilité, les leviers peuvent devenir élevés, et toute erreur d'appréciation peut s'avérer désastreuse, surtout en cas de changement brusque et non anticipée de la volatilité.

Finalement, il semble presque préférable de rechercher les actifs à forte volatilité, l'estimation en sera plus robuste. Avec des sous jacents très volatils, les rendements deviennent quasi négligeables et la stratégie optimale est sans doute proche d'une exposition constante à 0.5 (on peut montrer facilement que le levier de 0.5 est le levier optimal pour toute distribution symétrique et d'espérance nulle pour des rendements logarithmiques).

Baviera donne un exemple d'estimation pour des taux d'intérêt, entre 7.15% et 9.83% annuel. L'estimation de f^* est 14.46 avec un écart type de de 8.6.

Il sera sans doute préférable d'utiliser des méthodes non paramétriques et online qui fournissent des moyens plus puissants pour estimer le taux de croissance optimal (voir 6)

En règle générale, l'erreur d'estimation sera assez grande sur des actions classiques peu volatiles. Par exemple, prenons le cas d'une action avec un rendement espéré de 10% et une volatilité de 20%, sur une génération aléatoire de 100 000 jours, soit près de 400 ans, l'erreur sur le levier est encore très grande.

5 Gestion de portefeuille : notations et définitions

Dans cette section, nous nous limiterons à définir des termes et des notations utilisés dans la suite.

On notera $x_t = (x_{1,t}, \dots, x_{m,t})$, le vecteur des prix relatifs. au temps t , c'est à dire :

$$\begin{aligned} x_{i,t+1} &= \frac{P_{i,t+1}}{P_{i,t}} \\ &= 1 + \frac{\Delta P_{i,t}}{P_{i,t}} \end{aligned}$$

Une stratégie θ est caractérisée par une suite de vecteurs de pondération, $w_t = (w_{1,t}, \dots, w_{m,t})$, $w_{i,t}$ représentant la fraction de la richesse investie dans l'actif i **au début** de la période t .

W_{t-1} représente la richesse au début de la période t . W_t la richesse à l'issue de la période t .

La quantité d'actif détenue au début de la période t est donc, par définition :

$$q_{i,t-1} P_{i,t-1} = w_{i,t-1} W_{t-1}$$

A l'issue de la période t , les nouveaux prix sont $P_{i,t}$ et la richesse devient :

$$W_t = \sum_{i=1}^m q_{i,t-1} P_{i,t}$$

En utilisant les définitions précédentes, on obtient facilement :

$$W_t = \sum_{i=1}^m q_{i,t-1} P_{i,t} = \sum_{i=1}^m \frac{w_{i,t-1} W_{t-1}}{P_{i,t-1}} P_{i,t} = W_{t-1} \sum_{i=1}^m w_{i,t} x_{i,t} = W_{t-1} \langle w_{t-1}, x_t \rangle$$

Soit :

$$\frac{W_t}{W_{t-1}} = \langle w_{t-1}, x_t \rangle$$

en notant $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire.

En notant $S_t = W_t/W_0$, la croissance totale, à l'issue de la période de t , on a :

$$S_t = \prod_{\tau=1,t} w_{\tau-1} x_{\tau}$$

Le taux de croissance du portefeuille sera noté :

$$g(t) = \frac{1}{t} \log S_t$$

Le taux de croissance de l'actif i sera noté :

$$g(i, t) = \frac{1}{t} \log S_{i,t}$$

avec $S_{i,t}$, la performance de l'actif i depuis le temps $t = 0$.

$$S_{i,t} = \frac{P_{i,t}}{P_{i,0}}$$

A l'issue de la période t , quantités et/ou nouvelles pondérations doivent être ajustées pour vérifier à nouveau :

$$q_{i,t} P_{i,t} = w_{i,t} W_t$$

La dynamique est définie en fonction de la stratégie adoptée.

Dans le cas d'une stratégie Buy & Hold, les quantités restent constantes, les pondérations varient.

Dans le cas d'une stratégie CRP (Constant Rebalanced Portfolio), c'est l'inverse, les quantités varient, les pondérations restent constantes.

5.1 Contraintes :

Le portefeuille est dit auto finançant si $\sum_{i=1}^m w_{i,t} = 1$, il n'y a ni apport ni retrait/consommation.

Si les ventes à découvert ne sont pas autorisées, $w_{i,t} \geq 0$. Mais cette dernière contrainte n'est pas indispensable à l'établissement de la plupart des résultats.

Le premier actif 1 sera l'actif sans risque (ou le cash). Un levier supérieur à 1 sur les actifs risqués se traduira donc par un cash négatif, donc un emprunt, c'est à dire, $\sum_{1 < i \leq m} w_{i,t} > 1$ et $w_{1,t} = 1 - \sum_{1 < i \leq m} w_{i,t} < 0$

5.2 Stratégie Buy & Hold

Une stratégie de type Buy & Hold (BAH) consiste à répartir la richesse initiale W_0 en une pondération initiale, w_0 , et à ne plus réajuster.

Les quantités restent constantes, indépendantes du temps :

$$q_i = q_{i,t} = q_{i,0} = w_{i,0}W_0/P_{i,0}$$

La richesse évolue en fonction de la performance des actifs :

$$W_t = \sum_{i=1}^m q_{i,0}P_{i,t} = \sum_{i=1}^m \frac{w_{i,0}W_0}{P_{i,0}}P_{i,t} = W_0 \sum_{i=1}^m w_{i,0}P_{i,t}/P_{i,0} = W_0 \sum_{i=1}^m w_{i,0}S_{i,t}$$

$$S_t = \frac{W_t}{W_0} = \sum_{i=1}^m w_{i,0}S_{i,t}$$

avec $S_{i,t}$, la performance de l'actif i depuis le temps $t = 0$ $S_{i,t}$ est aussi la performance du portefeuille BAH, entièrement investi dans l'actif i .

Les pondérations évoluent donc en fonction de la performance des actifs, de la manière suivante :

$$w_{i,t} = q_{i,0}P_{i,t}/W_t = \frac{q_{i,0}P_{i,0}P_{i,t}/P_{i,0}}{W_0S_t} = w_{i,0} \frac{S_{i,t}}{S_t}$$

La pondération est donc multipliée par la performance relative de l'actif.

Dans le cas $w_{i,0} \geq 0$ (pas de vente à découvert), on voit donc que la performance d'un portefeuille BAH est au mieux celle du meilleur actif.

$$S_t \leq \max_i S_{i,t}$$

Le taux de croissance d'un portefeuille BAH est

$$\begin{aligned} g(t) = \frac{1}{t} \log S_t &= \frac{1}{t} \log (\sum_{i=1}^m w_{i,0}S_{i,t}) \\ &\geq \frac{1}{t} \log \sup_i w_{i,0}S_{i,t} \\ &\geq \frac{1}{t} \log \sup_i w_{i,0}S_{i,t} \\ &\geq \sup_i \frac{1}{t} \log S_{i,t} + \frac{1}{t} \log \sup_i w_{i,0} \end{aligned}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} g_t = \sup_i \liminf_{n \rightarrow \infty} g(i, t)$$

Asymptotiquement, on voit que le taux de croissance du meilleur actif va déterminer le taux de croissance du portefeuille.

5.3 Portefeuille CRP

Une stratégie de type Constant Rebalanced Portfolio (CRP) consiste à maintenir une pondération constante w ,

$$w_{i,t} = w_i$$

pour tout t ,

Dans le cas d'un portefeuille CRP, on doit ajuster les quantités (vendre ou acheter), afin de maintenir les pondérations constantes, et vérifier :

$$\begin{aligned} q_{i,t-1}P_{i,t-1} &= w_iW_{t-1} \\ q_{i,t}P_{i,t} &= w_iW_t \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{q_{i,t}}{q_{i,t-1}} = \frac{\langle w, x_t \rangle}{x_{i,t}} \quad (10)$$

Avec les notations simplifiées r_i le rendement et q_i les quantités en portefeuille au temps $t - 1$

$$\begin{aligned} \delta q_i/q_i &= (q_{i,t} - q_{i,t-1})/q_{i,t-1} \\ x_{i,t+1} &= 1 + r_i \end{aligned}$$

on obtient :

$$\frac{\delta q_i}{q_i} \approx \langle w, r \rangle - r_i$$

On doit donc alléger si $x_{i,t} > \langle w, x_t \rangle$ ($r_i > \langle w, r \rangle$), c'est à dire si l'actif sur-performe la moyenne pondérée des performances, se renforcer dans le cas inverse.

5.4 Cas général

Dans le cas général, les relations suivantes devront être vérifiées :

$$\begin{aligned} q_{i,t-1}P_{i,t-1} &= w_{i,t-1}W_{t-1} \\ W_t &= \sum_{i=1}^m q_{i,t-1}P_{i,t} \\ q_{i,t}P_{i,t} &= w_{i,t}W_t \end{aligned}$$

Conduisant à la relation :

$$\frac{q_{i,t}}{q_{i,t-1}} \frac{w_{i,t-1}}{w_{i,t}} = \frac{\langle w_{t-1}, x_t \rangle}{x_{i,t}}$$

Nous retrouvons les résultats d'un portefeuille Buy & Hold ($q_{i,t}/q_{i,t-1} = 1$) ou CRP ($w_{i,t-1}/w_{i,t} = 1$).

On notera que :

$$\frac{\partial \log \langle w, x_t \rangle}{\partial x_i} = \frac{x_{i,t}}{\langle w, x_t \rangle}$$

Propriété que l'on pourra utiliser dans des méthodes d'estimations utilisant le gradient (Scharfer [58]).

5.5 Taux de rotation et coûts de transaction

Une définition couramment admise est la suivante [30] :

– taux de rotation à l'achat :

$$TO_p = \sum_{i=2}^m \max(0, w_{i,t} - w_{i,t-1})$$

– taux de rotation à la vente :

$$TO_s = \sum_{i=2}^m \max(0, w_{i,t-1} - w_{i,t})$$

– taux de rotation :

$$TO = \min(TO_p, TO_s)$$

TO_s et TO_p sont égaux si il n'y a pas de modification sur le cash.

On pourra donner une autre définition :

$$TO = \sum_{i=2}^m |w_{i,t} - w_{i,t-1}|$$

qui donnera une meilleure relation avec les coûts de transactions. Ou mieux encore :

$$TO = \sum_{i=2}^m |w_{i,t} \langle w_{t-1}, x_t \rangle - w_{i,t-1} x_{i,t}|$$

qui représente la somme des montants négociés, en pourcentage de la richesse, à la vente ou à l'achat. Si les coûts de transactions (y compris les frictions) sont proportionnels, la croissance de la richesse sera :

$$w_{t-1}^T x_t - TO * c$$

5.6 Hedging

Il existe plusieurs types de hedging : dollar neutre, marché neutre, etc ... [38]

Un portefeuille dollar neutre, sera construit de telle façon que l'exposition aux actifs risqués est nulle. Autrement dit :

$$\sum_{i=2,m} w_i = 0$$

avec $w_1 = 1$, la pondération en actif sans risque. de sorte que la contrainte

$$\sum_{i=1,m} w_i = 1$$

doit être respectée, en permanence.

Dans le cas d'un portefeuille "short only", on aurait :

$$\sum_{i=2,m} w_i = -1$$

si bien que

$$\sum_{i=1,m} w_i = 2$$

On toucherait deux fois le taux sans risque. En pratique, la plupart des courtiers, non seulement, ne rémunèrent pas les liquidités, mais prélèvent des frais supplémentaires sur les ventes à découvert !

5.7 Les indices

Dans le cas de l'indice CAC40, par exemple, il s'agit d'une pondération par le flottant, on passe les détails en cas de modifications du nombre de titres, détachement de coupons, etc ... voir la [méthode de cacluls du CAC40](#) pour plus de détail. D'autres indices, comme le DowJones utilisent la moyenne arithmétique des prix. Dans tous les cas, ces indices se comportent comme des portefeuilles Buy & Hold.

Etant donné un portefeuille "long" qui est supposé battre un indice de référence (ou benchmark), on peut transformer la performance relative en performance absolue, en vendant tout simplement cet indice de référence.

Nous supposons que cet indice de référence est construit comme un portefeuille Buy & Hold. D'après 5.2, les pondérations du portefeuille d'indice évoluent en fonction des performances des actifs composant l'indice.

$$\text{posons } S_t^I = \sum_{i=1}^m w_{i,0}^I S_{i,t}$$

La pondération de l'indice devient :

$$w_{i,t}^I = \frac{w_{i,0}^I x_{i,t}}{\sum_t^I}$$

avec $x_{i,t} = P_{i,t}/P_{i,t-1}$, le prix relatif de l'actif i à la période t .

Soient $w_{i,t}^L$, les pondérations d'un portefeuille long.

A l'issue de la période t , les pondérations du portefeuille "dollar neutre" sont :

$$\begin{aligned} w_{i,t} &= w_{i,t}^L - w_{i,t}^I \text{ pour } i \neq 1 \\ w_{1,t} &= 1 \end{aligned}$$

(en supposant que $w_{1,t}^L = w_{1,t}^I = 0$)

L'évolution du portefeuille est :

$$S_t = \frac{W_t}{W_{t-1}} = 1 + w_{1,t-1}^L \cdot x_t - w_{1,t-1}^I \cdot x_t$$

A l'issue de la période t , un ajustement sera nécessaire, afin de :

- respecter la stratégie du portefeuille long
- respecter la contrainte dollar neutre.

6 Les Portefeuilles Universels

"The future, in some sense, will be like the past. Certain patterns have predictive value, because they replicate themselves through time. Our assignment is to find these patterns. This is the science. The rest is voodoo." Doyne Farmer

6.1 Introduction

Les bien nommées méthodes universelles garantissent les meilleurs taux de croissance sous des hypothèses de distributions des rendements peu restrictives. Une méthode sera dite universelle si :

$$\frac{1}{t} \lim_{t \rightarrow \infty} W_t = G^*$$

Avec G^* le taux de croissance du meilleur CRP "in hindsight", W_t , la richesse à la période t . En d'autres termes, il s'agit d'algorithmes capables de "prédire l'avenir" ... et ce quelles soient les distributions des rendements, pourvu que celles ci possèdent des propriétés peu restrictives, de stationnarité des rendements et rendements journaliers bornés. Il s'agit en

quelque sorte de développer des méthodes de Kelly non paramétriques pouvant fonctionner sur des classes de distributions très larges.

Dès 1984, Thomas Cover propose [22] "portefeuilles universels" [24], méthode universelle, online et compétitive :

- universelle : en faisant des hypothèses minimales sur les rendements des prix des actifs.
- online ou adaptative : l'apprentissage s'effectue au fur et à mesure de l'arrivée de nouvelles données. ¹
- compétitive : on est capable de définir les écarts maximum par rapport au portefeuille optimal a posteriori, et donc garantir des performances dans le pire cas.

Le portefeuille obtenu bat la meilleure action, mieux, le taux de croissance du portefeuille converge vers le taux de croissance optimal rétrospectif, c'est à dire celui qu'on aurait déterminé en connaissant l'avenir!!!

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(UNI) = \frac{1}{t} \log(BCRP)$$

avec UNI , le portefeuille universel, et $BCRP$ le meilleur portefeuille CRP.

On peut montrer que la solution optimale en présence de rendements iid quelconques est justement un CRP. C'est BCRP, le meilleur portefeuille CRP "in hindsight" et calculé à partir de rendements ex post, ..

$$w^* = \operatorname{argmax}_w \prod_{t=1, T} \langle w, x_t \rangle$$

avec les notations : w les pondérations, $x_t = (\dots, P_{i,t}/P_{i,t-1})$, le vecteur des performances au temps t et $P_{i,t}$ le prix de l'actif au temps t . Il est évident que pour un CRP donné, BCRP est inatteignable, car suppose la connaissance de l'avenir ... w^* est le portefeuille qu'il aurait fallu choisir depuis l'origine $t = 1$ au temps $t = T$, pour ce faire il aurait fallu connaître l'avenir. Malgré tout Cover nous dit que le taux de croissance sera le même que BCRP.

6.2 Méthode

On définit $B = \{w \in \mathfrak{R}_+^m \mid w_i \geq 0, w_1 + \dots + w_m = 1\}$

$$S_T(w) = \prod_{t=1, T} w^t \cdot x_t$$

¹ ce qui est différent de méthodes classiques d'apprentissage du type réseaux de neurones, par exemple, pour lesquels on distingue plusieurs phases : apprentissage, test : validation, out of sample. Ici, toutes les phases sont confondues, évidemment, il ne faudra pas s'attendre à des miracles au tout début ...

Le portefeuille universel est obtenu en investissant dans tous les portefeuilles de type CRP, par un Buy & Hold uniforme dans ces différents portefeuilles. La performance moyenne de ces CRP est :

$$S_T = \int_B S_T(w)dw$$

la pondération du portefeuille universel est :

$$w_{T+1} = \frac{1}{S_T} \int_B w S_T(w)dw$$

Le portefeuille est la moyenne pondérée par les performances de tous les CRPs.

On montre que :

$$S_T \equiv S_T^* \frac{(m-1)!(2\pi/T)^{(m-1)/2}}{\sqrt{|J_T|}}$$

avec J_T une matrice définie positive, dite matrice de sensibilité.

6.3 Compétitivité des portefeuilles universels

Qu'entend au juste par le terme "Compétitivité" ? El-Yaniv [10] en donne la définition suivante. Un algorithme est dit "c-compétitif", ou atteint un "ratio de compétitivité c", si il existe un constante, telle que,

$$\frac{OPT(I)}{ALG(I)} \leq c$$

pour toute séquence I , avec OPT désignant le résultat optimal in hindsight et ALG les résultats obtenus par l'algorithme on line.

L'analyse compétitive considère que la solution optimale pourrait ne pas être atteinte en présence d'incertitude et d'adversité.

Comme nous l'avons remarqué, le marché est sans doute soumis à une forte asymétrie en terme d'information, l'investisseur non informé devant faire face à des investisseurs sans doute mieux informé, voire "initiés".

Afin d'illustrer la notion de compétitivité, considérons un investisseur qui placerait sa richesse de manière equirépartie dans m actifs (risqués ou non risqués) : $w_1 = w_2 = \dots = w_m = 1/m$. Soient x_i , les prix relatifs en fin de période, La richesse devient : $\sum_{i=1,m} x_i/m$. Soit $x_k = \max x_i$. Alors, le ratio de compétitivité est $1/m$:

$$\frac{\sum_{i=1,m} x_i/m}{x_k} \geq 1/m$$

En l'absence de toute hypothèse sur les x_i , on peut montrer qu'il n'existe pas de meilleur ratio de compétitivité : il suffit de considérer le cas où tous les x_i sont nuls, sauf pour $i = k$. Dans la suite, nous considérons des hypothèses plus réalistes, mais néanmoins générales, à savoir que $|\log x_i|$ restent bornés.

Pour les portefeuilles universels de Cover, on peut donner un ratio de compétitivité :

$$\frac{S(BCRP)}{S(UNI)} \leq (T + 1)^m$$

avec m le nombre d'actifs. Cette propriété implique la convergence vers le taux de croissance du meilleur CRP :

$$\frac{1}{T} [\log S(BCRP) - \log S(UNI)] \leq \frac{1}{T} m \log(T + 1)$$

en posant

$$g(UNI) = \frac{1}{T} \log S(UNI) \text{ et } g(BCRP) = \frac{1}{T} \log S(BCRP)$$

on obtient :

$$g(UNI) \geq g(BCRP) - m \frac{T + 1}{T}$$

$$g(UNI) \rightarrow g(BCRP) \text{ lorsque } T \rightarrow \infty$$

6.4 Portefeuilles Universels - propriétés remarquables

$$W_T(w) = \prod_{t=1}^T \langle w, x_t \rangle$$

en normalisant $W_0 = 1$

$$W_T^* = \max_w W_T(w)$$

$$G^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log W_T^*$$

Si les x_i sont iid, la meilleure stratégie (CRP ou non) est une stratégie CRP, c'est la stratégie qui maximise le taux de croissance :

$$\overline{\lim} \frac{1}{T} \log W_T \leq G^*$$

La meilleure stratégie CRP est meilleure que le buy & hold dans un seul actif qui est aussi une stratégie CRP particulière :

$$W_T^* \geq \max_{i=1, N} W_T(e_i)$$

$e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ étant le vecteur unité, $w_i = 1$ $w_j = 0$ pour $j \neq i$. tout portefeuille buy & hold (BAH) est moins performant que le meilleur actif :

$$W_T(BAH) \leq \max_{i=1, N} W_T(e_i)$$

Donc le portefeuille BCRP bat tous les portefeuilles BAH, en particulier les indices classiques du type DJI ou CAC40!!!

$$W_T^* \geq W_T(BAH)$$

De même, en raison de la concavité du logarithme, le portefeuille BCRP bat la moyenne géométrique :

$$W_T^* \geq \left(\prod_{i=1}^N W_T(e_i) \right)^{1/N}$$

6.5 Portefeuilles Universels - discussion

Cette méthode évite donc le délicat problème de l'estimation du paramètre essentiel μ du levier optimal $G^* = \mu/\sigma^2$. Finalement, si on a affaire à une distribution gaussienne, ces algorithmes vont reconstituer un levier optimal identique, sans avoir à estimer les paramètres du processus. En fait, la méthode est bien plus générale, car elle est applicable à toute distribution des rendements.

On pourrait penser qu'il suffit d'utiliser des estimateurs des paramètres d'une diffusion. En réalité de tels estimateurs n'existent pas pour des processus stochastique quelconques [58]. En particulier, il est prouvé qu'il n'existe pas d'estimateur universellement consistant de l'espérance conditionnelle $E[X_n|X_{n-1}, \dots, X_0]$. En revanche, comme le montre Cover, il existe bien des méthodes non paramétriques pour estimer les pondérations conduisant au meilleur taux de croissance.

Cependant, Cover ne fait pas d'hypothèses sur les rendements, et ne cherche pas non plus à exploiter des dépendances temporelles potentielles.

Nous verrons plus loin une méthode générale pour exploiter ces dépendances temporelles. Cela dit, l'absence évidente d'autocorrélations temporelles aux premiers lags rend acceptable l'hypothèse iid. En conséquence, les stratégies basées sur des CRP constituent sans aucun doute une bonne approche pour la recherche de stratégies optimales.

Un premier article de Cover est apparu en 1984 [23], plus concis, mais contenant les bases de cette théorie qui a donné lieu à de nombreux travaux. Les portefeuilles universels et ses variantes constituent encore de nos jours un sujet de recherche actif (El-Yaniv, Gyorfı/Lugosi, ...). En revanche, il semble que ces méthodes ne soient pas très utilisées, ou si elles le sont, leur utilisation n'est pas rendue publique, hypothèse la plus probable, tant les résultats sont remarquables, tant théoriques que pratiques ... D'autres raisons peuvent être liées à la difficulté d'une mise en pratique en raison du temps de calcul nécessaire ou de problèmes de convergence, parfois jugée trop lente.

En particulier, les résultats sont valables pour les distributions les plus défavorables. L'un des intérêts de l'algorithme est donc de garantir des bornes, en ce sens on dit que l'algorithme est "compétitif". En contre partie, englobant une classe trop large de distributions, y compris et surtout les plus défavorables qui sont aussi les plus improbables, les estimations de convergence et performances sont nécessairement pessimistes ... En particulier :

$$\frac{\text{perf}(UNI)}{\text{perf}(BCRP)} \geq \frac{1}{(t+1)^{N-1}}$$

donc :

$$G_t(UNI) = G_t(BCRP) - O(\log t/t)$$

Encore, une fois, il s'agit ici du pire cas, improbable, car correspond à des configurations très particulières. En pratique, les performances sont bien meilleures.

Une autre critique à la méthode de Cover est la lenteur de la convergence vers le meilleur taux. La figure 6.5 montre que la convergence en $\log(t)/t$ peut ne pas être très rapide. 0.01 est atteint au bout de 650 jours de trading ...

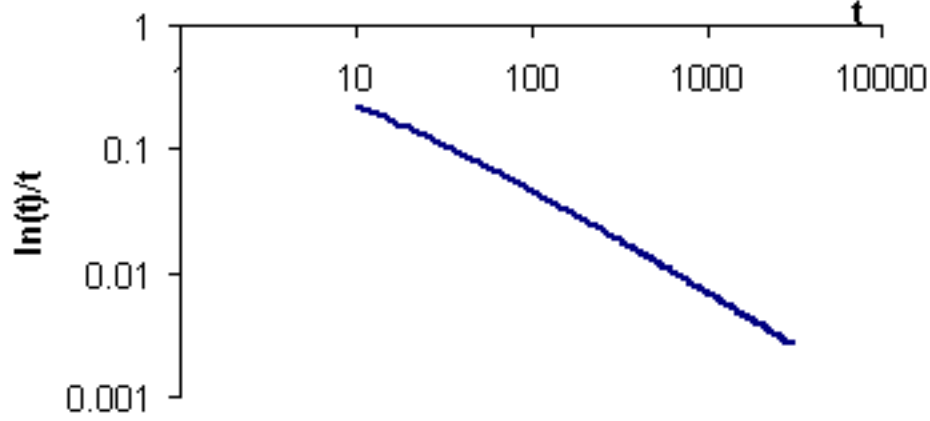
Pour résumer, malgré des résultats déjà remarquables, il existe plusieurs problèmes :

- Le temps et la mémoire nécessaires croissent de manière exponentielle avec le nombre d'actifs, en $O(t^{N-1})$
- Il s'agit d'un résultat asymptotique et la convergence peut être longue.
- L'algorithme de Cover n'essaie pas d'exploiter les dépendances qui pourraient exister.
- Pas de vente à découvert et pas de levier > 1 autorisé.
- Pas de prise en compte des coûts de transactions.

Il existe plusieurs variantes de l'algorithme de Cover et qui apportent des réponses partielles aux critiques ci dessus. Dans tous les cas, les portefeuilles universels de Cover donnent le fondement théorique important aux méthodes universelles, adaptatives, et compétitives.

6.6 Portefeuilles Universels - variantes

Une première variante consiste à mettre à jour les pondérations en fonction des nouveaux prix, sans nécessiter de calculs monstrueux.

FIG. 5 – $\log(t)/t$

Maximiser

$$F(w_{t+1}) = \eta \log(w_{t+1}.x_t - d(w_{t+1}, w_t)) \quad (11)$$

Sous la contrainte $\sum_{i=1}^m w_{i,t+1} = 1$ et $w_{i,t} > 0$ pour $i = 1, N$.² avec η le taux d'apprentissage et d une distance (distance de Kullback - entropie relative, distance euclidienne, etc ...). L'idée est d'ajuster les pondérations w en fonction de nouvelles informations, avec un taux d'apprentissage (η) et pénaliser cet ajustement ($-d$) pour rester proche de la pondération précédente.

Une solution approchée de $w_{i,t+1}$ est donnée par :

$$\frac{w_{i,t} \exp(\eta x_{i,t} / w_t . x_t)}{\sum_{j=1}^m w_{j,t} \exp(\eta x_{j,t} / w_t . x_t)}$$

Dans le cas η petit, on peut à nouveau développer :³

$$w_{i,t+1} = w_{i,t} \left(\eta \left(\frac{x_{i,t}}{w_t . x_t} - 1 \right) + 1 \right)$$

²on pourra relaxer les contraintes restrictives et autoriser par exemple $w_{i,t} < 0$ pour les ventes à découvert, avec certains $\sum_{i=1}^m w_{i,t} > 1$, etc ...

³ $\sum_{i=1}^m w_i \exp(\eta x_i / w . x) \approx \sum_{i=1}^m w_i (1 + \eta x_i / w . x) = \sum_{i=1}^m w_i + \eta \sum w_i . x_i / w . x = 1 + \eta$
 $w_{i,t+1} \approx w_i (1 + \eta x_i / w . x) / (1 + \eta) = w_i (1 + \eta (x_i / w . x - 1)) + O(\eta^2)$

On a affaire à deux processus inverses : en cas de hausse d'un actif, $x_{i,t} > w_t \cdot x_t$, on aura tendance à augmenter la proportion avec une certaine inertie due à η . D'un autre côté, cette même hausse entraîne un allègement immédiat dans le portefeuille afin de maintenir les pondérations (CRP). Au final, c'est l'allègement qui l'emporte, car $\eta < 1$.

En clair, le taux d'apprentissage a pour effet de jouer une stratégie de type momentum. Avec $\eta \ll 1$, on joue un momentum long terme.

Cohérent avec les faits empiriques sur les stratégies en fonction du terme :

- contrarien à court terme,
- momentum à moyen/long terme.

En pratique, η sera de l'ordre de 0.05, des valeurs comprises entre 0.01 et 0.15 donneront également de bons résultats.

En fait, η peut s'interpréter comme dans le cas d'une moyenne mobile exponentielle, avec un temps caractéristique $\tau = -1/\log(1 - \eta)$, pour $\eta = 0.05$, $\tau = 19.5$ jours (si on travaille en jours).

6.7 Vente à découvert et marges

La plupart des articles traitant des portefeuilles universels ne fonctionnent qu'avec les contraintes restrictives $\sum_{i=1}^m w_i = 1$ et $w_i \geq 0$ ce qui limite donc une exposition globale ≤ 1 . Il s'agit donc d'adapter les algorithmes pour autoriser les ventes à découvert ($w_i \leq 0$ et des expositions globale ≥ 1). On peut aussi conserver la contrainte $\sum w_i = 1$ et autoriser le cash $w_0 \leq 0$ à prendre des valeurs négatives, ce qui autorise à avoir $\sum_{i \neq 0} w_i > 1$.

6.8 Applications et analogies avec la compression des données

Cover est avant tout un spécialiste de la théorie de l'information. Les algorithmes non paramétriques mis en oeuvre dans les portefeuilles universels sont similaires et applicables à la compression des données.

On peut faire un parallèle intéressant avec les algorithmes de compression (tel que LZW).

Gestion de portefeuille	Compression
pondérations	probabilités de la source
CRP	iid
croissance	ratio des probabilités
taux de croissance	facteur de compression
logarithme de la richesse	taille du fichier

De là, à déduire que pour détecter les meilleures actions, il suffirait de zipper le fichier des cours et calculer le facteur de compression!!! Cette idée a déjà été testée avec l'algorithme de Lempel-Ziv[10], une variante des portefeuilles universels.

7 La méthode YAUP

Nous proposons ici une nouvelle approche, généralisant à bien des égards les portefeuilles universels de Cover, de Gyorfı et Lugosi [31] et Cross et Barron [20].

YAUP sera le nom du portefeuille ainsi obtenu : YAUP, signifiant Yet Another Universal Portfolio.

Les caractéristiques sont les suivantes :

- Universels et compétitifs : le taux de croissance converge vers le meilleur taux de croissance, dans le pire cas, pour une large classe de distributions des actifs.
- sans contrainte : il est possible d'effectuer des ventes à découvert et des emprunts : la seule contrainte est $\sum w_i = 1$, les w_i pouvant donc être ≤ 0 ou ≥ 1 . Les solutions sans contrainte sont bien meilleures que avec contraintes classiques ($w_i \geq 0$ et $w_i \leq 1$), seuls considérés par Cover et Gyorfı/Lugosi, etc ...
- La fonction d'utilité n'est pas nécessairement une fonction en log, on peut choisir l'aversıon relative au risque, ce qui permet d'ajuster la stratégie aux objectifs de gestions : volatilité, perte maximale historique, VaR, sans modifier le ratio de Sharpe.
- Auto régressifs : Gyorfı et Lugosi [31] proposent une variante qui va exploiter les relations complexes de dépendance temporelles entre les actifs, par des méthodes de prédiction non paramétriques. Ils démontrent que ces méthodes possèdent les propriétés voulues d'universalité. Le portefeuille est constitué par un Buy Hold dans plusieurs experts. Comme dans le cas de Gyorfı/Lugosi, les experts YAUP n'investissent que sur des distributions de rendements conditionnelles $x_i|x_{i-1}x_{i-2}x_{i-3}\dots$, permettant d'exploiter des dépendances temporelles pertinentes, linéaires et non linéaires.

La propriété d'universalité est démontrée pour une très large classe de distributions des rendements. Cette propriété est de nature à renforcer la confiance dans la robustesse de cette méthode, limitant ainsi les risques de "Data Snooping" et "sur optimisation".

7.1 Présentation générale

Qu'il s'agisse de Cover ou Gyorfı/Lugosi, voire Cross/Barron, on peut décrire la méthode de la manière générique suivante : le portefeuille résultant est une combinaison Buy &

Hold de portefeuilles "experts", chaque expert réalisant une stratégie qui lui est propre. Les pondérations du portefeuille résultant sont obtenues à partir des pondérations des experts, elles mêmes pondérées par leurs performances respectives.

Soit Θ , l'ensemble des paramètres des stratégies, appelées aussi experts, éventuellement en nombre infini, dénombrable ou non. Chaque expert est représenté par des paramètres $\theta \in \Theta$. Soit π , une distribution de probabilité sur Θ .

Notons $w_{\theta,t}$ le vecteur des pondérations et $W_{\theta,t}$ la richesse de l'expert θ à la date t , performance terminale ou richesse étant identique si on considère, sans perte de généralité, que la richesse initiale = 1 à $t = 0$.

Les pondérations w_t du portefeuille pour la prochaine période sont obtenues par une somme pondérée par les performances et la distribution π :

$$w_t = \int_{\Theta} w_{\theta,t} W_{\theta,t} d\pi(\theta) / \int_{\Theta} W_{\theta,t} d\pi(\theta)$$

et la performance terminale du portefeuille :

$$W_t = \int_{\Theta} W_{\theta,t} d\pi(\theta) \tag{12}$$

En effet, la richesse est le produit des facteurs de croissance du portefeuille. A chaque période, la richesse du portefeuille est multipliée par :

$$\langle w_{\tau-1}, x_{\tau} \rangle$$

et en notant $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire, et x_{τ} les prix relatifs, à l'issue de la période τ .

$$\begin{aligned} W_t &= \prod_{\tau=1}^t \langle w_{\tau-1}, x_{\tau} \rangle \\ &= \prod_{\tau=1}^t \langle \int_{\Theta} w_{\theta,\tau-1} W_{\theta,\tau-1} d\pi(\theta) / \int_{\Theta} W_{\theta,\tau-1} d\pi(\theta), x_{\tau} \rangle \\ &= \prod_{\tau=1}^t \int_{\Theta} \langle w_{\theta,\tau-1}, x_{\tau} \rangle W_{\theta,\tau-1} d\pi(\theta) / \int_{\Theta} W_{\theta,\tau-1} d\pi(\theta) \\ &= \prod_{\tau=1}^t \int_{\Theta} W_{\theta,\tau} d\pi(\theta) / \int_{\Theta} W_{\theta,\tau-1} d\pi(\theta) \end{aligned}$$

Les facteurs se simplifient pour donner la relation 12

Dans le cas discret, on aura :

$$w_t = \frac{\sum_{i=1}^{\text{card}(\Theta)} \pi(\theta_i) w_{\theta_i,t} W_{\theta_i,t}}{\sum_{i=1}^{\text{card}(\Theta)} \pi(\theta_i) W_{\theta_i,t}}$$

avec $\text{card}(\Theta)$ pouvant être fini ou infini (en pratique seuls quelques experts suffiront). La performance terminale du portefeuille dans le cas discret est :

$$W_t = \sum_{i=1}^{\text{card}(\Theta)} \pi(\theta_i) W_{\theta_i,t}$$

La distribution π peut être arbitraire, elle représente en quelque sorte un arrangement au hasard, une indifférence aux conditions initiales n'ayant que peu d'impact sur la performance globale du portefeuille. Les performances des différents experts étant multiplicatives, la performance du portefeuille finira par être proche des meilleurs experts, indépendamment de la distribution des pondérations π .

Les experts, les paramètres θ et la distribution π varient en fonction des auteurs :

- Dans le cas de Cover l'univers des experts est l'ensemble de tous les portefeuilles CRP, avec Θ l'ensemble des pondérations possibles $B = \{[0, 1]^d \mid \sum w_i = 1 \text{ et } w_i \leq 0 \text{ pour } i = 1, m\}$, avec d , le nombre d'actifs, et π une distribution uniforme ou de Dirichlet :

$$w_t = \frac{\int_{w \in B} w W_{w,t} d\pi(w)}{\int_{w \in B} W_{w,t} d\pi(w)}$$

Intégrale multiple qui nécessite une capacité de stockage et un temps de calcul exponentiels en nombre d'actifs. La solution exacte s'avère impraticable au delà de quelques actifs. Il existe cependant des méthodes efficaces de type Monte Carlo [41] [11] [36] [42]. La distribution π peut dépendre des pondérations, par exemple, la distribution de Dirichlet privilégie les portefeuilles CRP ayant peu d'actifs, elle donne de meilleurs résultats.

- Dans le cas de Gyrofi/Lugosi, les experts sont aussi des portefeuilles CRP, mais de nature un peu différente, estimé sur des sous ensembles de l'historique (voir ci après). π est une distribution uniforme. Les valeurs des paramètres θ correspondent à des paramètres de discrétisation des rendements.
- Dans le cas de Cross Barron, les experts peuvent être des portefeuilles CRP, mais l'univers peut être plus large, les paramètres θ pouvant être des combinaisons linéaires des pondérations. La distribution des pondérations des experts est une gaussienne sur les paramètres, si bien que les paramètres, en conséquence les pondérations, peuvent prendre des valeurs positives et négatives arbitraires. Cette méthode permet de réaliser des stratégies universelles avec vente à découvert et emprunts.

- Enfin, on pourra comparer notre formulation à une généralisation des portefeuilles universels à des stratégies de trading telle que proposées dans [2]. Dans cet article, Θ représente les paramètres des stratégies (longueur des moyenne mobile, seuil de break-out, etc...). Cette approche ouvre des perspectives intéressantes pour aborder l’analyse technique” sous l’angle de stratégies universelles. Encore faut il prouver la consistance de ces ”estimateurs” exotiques vis à vis de distributions quasi iid !

De manière intuitive, on a donc intérêt à multiplier le nombre de stratégies et les combiner pour essayer d’atteindre le meilleur taux de croissance, le plus rapidement possible, tout en garantissant des propriétés de compétitivité.

7.2 Pourquoi ça marche ?

On peut en donner une explication très intuitive ...

La richesse du portefeuille peut être vue comme une somme des richesses des experts :

$$W_t = \frac{1}{N_e} \sum_{i=1}^{N_e} W_{i,t}$$

en prenant, par exemple, $\pi(\theta_i) = 1/N_e$, et notant N_e , le nombre d’experts.

Le portefeuille combiné est donc une somme de variables aléatoires, chaque expert étant variable aléatoire multiplicative, au comportement exponentiel.

Le résultat est également exponentiel, le portefeuille sera dominé par le meilleur portefeuille exponentiel. On pourrait faire la même chose avec un Buy & Hold dans les actions, sauf que les actions n’ont pas un comportement exponentiel ! les actions ne sont pas suffisamment diversifiées alors que les portefeuilles experts sont des CRP, aux comportements réellement multiplicatifs, par construction même.

A long terme, la distribution, exponentielle, possède une forte asymétrie positive, la médiane est très largement inférieure à l’espérance !

La construction du portefeuille universel essaie de traquer cette espérance...

On peut illustrer ce phénomène par un exemple numérique très simple. prenons 200 experts, que nous supposons indépendants et de même loi lognormale, de volatilité 30% et espérance nulle (en logarithme). L’espérance de la performance de l’expert sur un an est $R = \mu + \sigma^2/2 = 0 + .3^2/2 = 0.045$. Simulons ces experts sur 20 ans :

Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
1.90e-04	2.89e-02	5.12e-01	1.84e+02	1.71e+00	3.38e+03

On observe que la plupart des stratégies perdent de l’argent, la médiane étant à 0.512, ce qui est normal, car la médiane est égale à 1. En revanche, la moyenne multiplie la richesse par 18 !.

La combinaison des experts réalise cette moyenne, grâce à la contribution de un ou deux experts particulièrement performants.

La diversification en plusieurs experts fonctionnera d'autant mieux que :

- les experts sont indépendants,
- la richesse des experts est effectivement un processus multiplicatif.

On voit que le portefeuille universel combine les vertus de la gestion dynamique (rebalancing) avec celles du Buy & Hold (dominance des meilleurs).

Dans le cas particulier des portefeuilles universels, on trouvera une explication plus formelle dans l'article original de Cover [24].

On pourra trouver ce même type d'explication dans Sornette [63],

7.3 Etudes empiriques

A titre de test, nous appliquons la méthode YAUP sur des historiques récents, depuis début 1990 jusqu'à début 2004. Les données proviennent de REUTERS/YAHOO et sont ajustées des splits et dividendes (les tests de Cover et de Gyorf/Lugosi portent sur des périodes largement antérieures, avant 1987, et a priori plus favorable, car sans doute moins bien "arbitrée").

A titre de test préliminaires, nous appliquerons la méthode à une paire, disons l'indice CAC40 et l'Oreal. Nous effectuons ensuite les tests sur l'univers plus large des actions du Dow Jones, puis sur les indices US et Européens, pouvant donner lieu à une implémentation sur les marchés à terme d'indices.

7.3.1 CAC40/L'Oreal

A titre de test, appliquons ce principe à la seule paire (CAC40,L'oréal), avec une aversion au risque de 10, afin de limiter le caractère "sauvage" du Kelly pur et dur ($\gamma = 1$).

```
^FCHI OREP.PA
0.7784 0.2216
rapt.ptf.indicators(res$ws,prs)
$twr 5.388
$G 0.0004757
$G.year 1.127
$volatility 0.2423
$sharpe 0.6919
$var
      10%      5%      1%
```

```
-0.01729 -0.02382 -0.04194
```

```
$mdd 0.5249
```

à comparer au BCRP:

```
bcrp.res=rapt.bcrp.solve.QP(prs,lower=NULL,upper=NULL,gamma=10,rfreecol=0)
```

```
bcrp.res$w
```

```
  ^FCHI OREP.PA
```

```
  0.754  0.246
```

```
rapt.ptf.indicators(bcrp.res$w,prs)
```

```
$twr 3.59
```

```
$G 0.0003610
```

```
$G.year 1.095
```

```
$volatility 0.2271
```

```
$sharpe 0.5421
```

```
$var
```

```
    10%    5%    1%
```

```
-0.01629 -0.02277 -0.03905
```

```
$mdd 0.5527
```

On constate que le portefeuille YAUP est meilleur que le meilleure portefeuille CRP "in hindsight" !!! avec des caractéristiques plus intéressantes en terme de Sharpe, perte maximale historique ...

7.3.2 Performances sur les actions du DJI

Nous effectuons une simulation sur les actions du Dow Jones et l'indice lui même, de 1990 à début 2004. Nous prenons une aversion au risque de 30 afin d'ajuster notre gestion à des objectifs acceptables en terme de perte maximale historique (moins de 15% sur toute la durée).

```
$twr 1033
```

```
$G 0.00227
```

```
$G.year 1.77
```

```
$volatility 0.195
```

```
$sharpe 2.79
```

```
$var
```

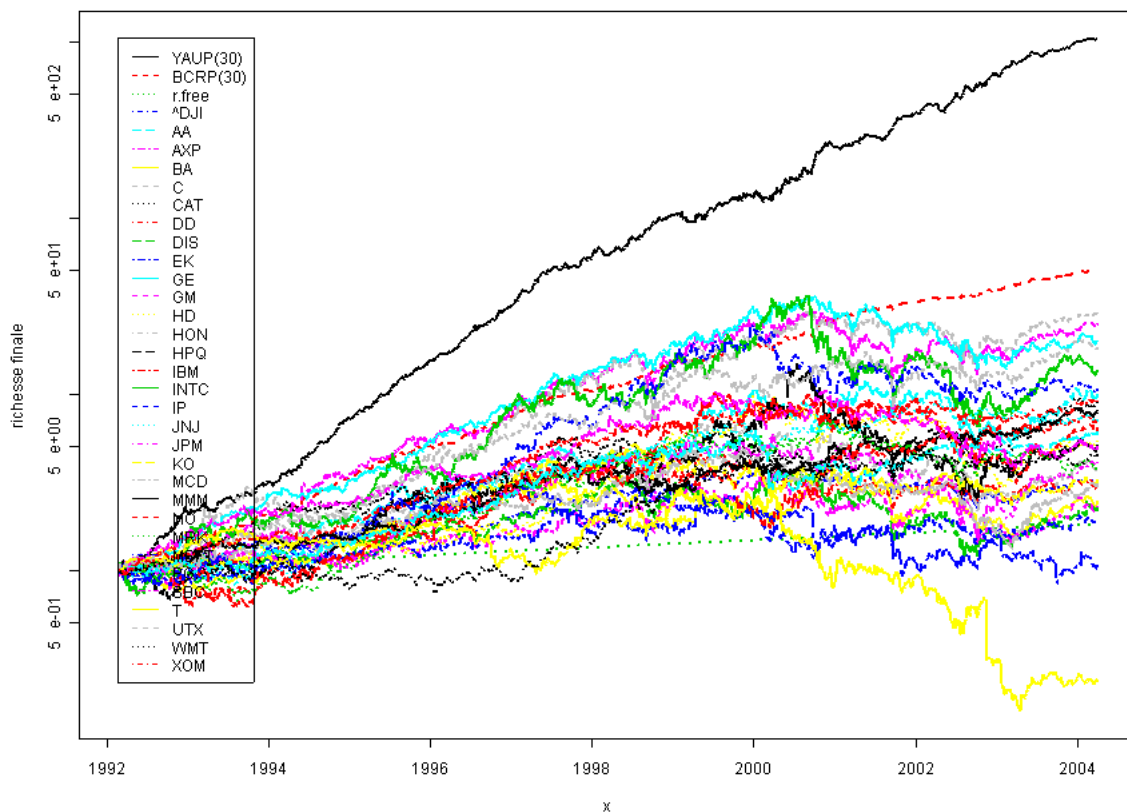
```
    10%    5%    1%
```

```
-0.0123 -0.0169 -0.0266
```

```
$mdd 0.141
```

Le meilleur portefeuille CRP in sample est donné par

```
rapt.ptf.indicators(bcrp.res.30$w,prs[-(1:buildup),])
$twr 49.6
$G 0.00128
$G.year 1.38
$volatility 0.0993
$sharpe 2.80
$var
      10%      5%      1%
-0.00602 -0.00854 -0.01449
$mdd 0.102
```



Le portefeuille ainsi obtenu atteint une richesse finale multipliée par 1033, supérieure au meilleur portefeuille CRP de même aversion ex post (croissance 49.6)! Un ratio de Sharpe

de 2.79, une croissance annuelle respectable de 1.77 (77%), une volatilité inférieure à 20%, une VaR(0.99) à 2.66%, et une perte maximale historique de l'ordre de 14%.

On voit que le YAUP(30) atteint le même ratio de Sharpe de 2.8 que le meilleur portefeuille "in hindsight" ! ce qui est correspond à un excellent ratio.

Il ne faut pas attendre très longtemps pour voir apparaître les performances.

En effet, avec un ratio de Sharpe de l'ordre de 3, si on suppose un facteur d'échelle en 0.5, le temps caractéristique T_c , celui pour lequel on aura un signal comparable au bruit : $\mu(t) \approx \sigma(t)$ c'est à dire un Sharpe de 1, d'où :

$$T_c \approx 1/\text{sharpe}^2$$

Soit $T_c = 1/3^2 = .111$ années, moins d'un mois suffit donc à juger la stratégie!

Nous sommes donc très loin des convergences "à la Cover", où il faut attendre plusieurs années pour voir enfin converger le portefeuille universel!

Ce temps caractéristique est indépendant de l'aversion au risque, de la même façon que le ratio de Sharpe.

La composition du portefeuille est conforme aux études "in sample" : a savoir un portefeuille long en actions, et couvert sur l'indice. Dans le cas du YAUP(30), on constate en outre que la pondération en actif non risqué est proche de 1, le portefeuille est quasiment dollar neutre :

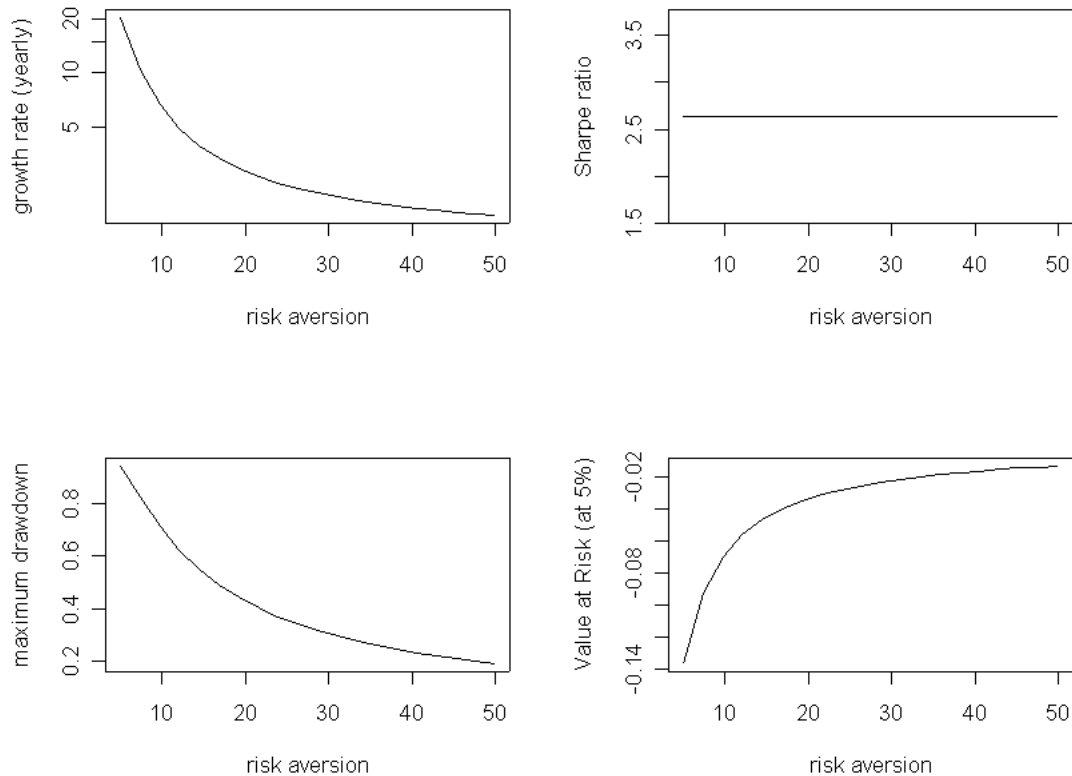
$$\sum_{i=2}^m w_i \approx 0$$

```
sort(res$ws.last)
  ^DJI      T      WMT      HPQ      INTC      MCD      JPM      MSFT
-3.37409 -0.00664  0.03872  0.04199  0.04666  0.04766  0.05322  0.06372
  AXP      DIS      BA      HD      EK      SBC      MRK      GM
  0.06609  0.06652  0.06827  0.07536  0.07825  0.08509  0.08701  0.09273
  JNJ      IP      HON      DD      C      IBM      CAT      KO
  0.09477  0.10104  0.11141  0.12690  0.13863  0.14598  0.14849  0.15053
  AA      MO      MMM      UTX      GE      PG      XOM      r.free
  0.15503  0.16193  0.18673  0.22256  0.22748  0.24715  0.31273  0.93808
```

Afin de calculer le portefeuille pour d'autres aversions relatives pour le risque, on pourra utiliser une méthode simplifiée consistant à ajuster les pondérations en actif risqué en fonction de l'aversion au risque. Par exemple pour une aversion au risque deux fois plus élevée, il suffit de diviser les pondérations par 2, et ajuster le cash en conséquence.

Cette méthode simple (mais inexacte) permet d'illustrer l'ajustement des pondérations pour respecter des objectifs de gestion, en terme de perte maximale historique, de Value at

Risk, etc ... étant entendu que le ratio de Sharpe n'est pas affecté par l'aversion relative, comme le montre les figures ci après.



```
# mais la formule ne semble pas fonctionner
si on veut retrouver le portefeuille de Kelly
en multipliant par 10 ???
ws=10*res$ws # pour retrouver le ptf de Kelly.
ws[,1]=apply(ws,1,function(x) 1-sum(x[-1]))
rapt.ptf.indicators(ws[-(1:buildup),],prs[-(1:buildup),])
$twr -8.99324e-41
une richesse négative !!!
```

Il semble que le YAUP(30) corresponde davantage à un $BRCP(\gamma)$ pour un γ inférieur. Par certains aspects (volatilité notamment), Le YAUP(30) est plus proche du BCRP(10)

que du BCRP(30). Cet effet provient sans doute des défauts d'estimations en début de période : les estimations semblent instables au début de la simulation, en raison sans doute du manque de données d'apprentissage conduisant à une grande variance des estimateurs. Les pondérations sont bien trop grandes et trop fluctuantes au début de la simulation.

Le YAUP(1) de Kelly converge rapidement vers 0. Il est probable que cherchant le portefeuille de Kelly, il arrive assez souvent de sur estimer les pondérations donc de "sur parier", ce qui présente un risque majeur en terme de pertes historiques. Rappelons que dans le cas de Kelly, la distribution des drawdowns a un exposant de queue de 2, moyenne et variance deviennent infinies. Il semble donc qu'on ne puisse pas généraliser aussi rapidement et passer du cas avec contraintes à celui sans contrainte, sans examiner de plus près les risques de sur estimation. Ce risque est assez limité dans le cas sans contrainte : après tout lorsque les pondérations sont contraintes à $\sum w_i = 1$ et $w_i \geq 0$, $w_i \leq 1$, le risque est très limité, les sur estimations peuvent passer inaperçues. Il en va différemment lorsque les pondérations sont libres et peuvent prendre des valeurs arbitrairement grandes ou petites. La prise en compte des coûts de transaction au coeur de la procédure d'estimation sera un moyen de tempérer l'excès des taux de rotation des portefeuilles.

7.3.3 Indices US et Europe

Nous testons ici les portefeuilles universels YAUP sur les indices US et Européens : Dow Jones, S&P 500, Nasdaq, DAX et CAC40. Dans une première approche, nous avons testé la méthode en prenant les cours de clôture, sans tenir compte des questions relatives à l'asynchronisme. Nous obtenons des performances explosives, à défaut de fournir un système crédible, nous prouvons que cette méthode est capable de capturer ce type d'anomalies, sans avoir à la préciser ou la modéliser. Au passage, on soulignera les dangers dues au manque de soin dans les simulations.

Le problème de l'asynchronisme peut en effet conduire à des leurres (voir Lo et MacKinlay [45]). Les cours de clôture ne sont pas synchrones : le CAC40 ferme à 17heure, le DAX à 20H, les indices US à 22H. Prendre les cours de clôture, c'est considérer que toutes ces informations sont disponibles au même moment.

On peut minimiser le problème en prenant les cours de clôture des marchés US et les cours d'ouverture des marché Européens, considérant que l'information est quasi nulle entre la fermeture US et l'ouverture Europe le lendemain. Nous pourrions donc faire comme si nous prenions notre décision à la clôture du marchés US, en connaissant quasiment l'ouverture du lendemain des marchés Européens. D'ailleurs, les marchés à terme sur le CAC40 ferment à la même heure que les marchés US.

7.3.4 Tests utilisant les cours de fermeture US et ouverture Europe

D'excellents résultats peut être trop!

```
rapt.ptf.indicators(ws.0,prs.0)
$twr 48798321645
$G 0.00834836
$G.year 8.19715
$volatility 0.754009
$sharpe 3.07211
$var
      10%      5%      1%
-0.0266358 -0.0458180 -0.1036756
$kurtosis 134.231
$mdd 0.452933
```

Soit un capital multiplié par près de 50 Milliards 4.10^{10} , en un peu plus de 12 ans. Soit une richesse multipliée par 8.2 en moyenne par an!!! Cependant la stratégie demeure très risquée.

On pourra réduire le risque en augmentant l'aversion ou en réduisant les pondérations pour ajuster aux objectifs de gestion, le ratio de Sharpe restant égal à 3. Par exemple, si on réduit par 7, on aura :

```
ws.1=ws.0/7
ws.1[,1]=apply(ws.1,1,function(x) 1-sum(x[-1]))
rapt.ptf.indicators(ws.1,prs.0)
$twr 79.1625
$G 0.00148287
$G.year 1.45308
$volatility 0.107769
$sharpe 3.07211
$var
      10%      5%      1%
-0.00363915 -0.00637946 -0.01464483
$kurtosis 134.819
$mdd 0.0708632
```

et la composition est:

Soit une volatilité de l'ordre de 10%, une perte maximale historique de 7%, une VaR90 à 0.3%. Malgré une kurtosis importante, le portefeuille semble peu risqué. Ceci s'explique par sa composition long short :

```
ws.1[nrow(ws.1),]
  r.free    ^DJI    ^IXIC    ^SPX    ^GDAXI    ^FCHI
0.792893  0.603076  0.346767 -0.577279  0.125067 -0.290525
```

Donc plutôt long sur les US et plutôt short sur l'Europe.

Il est intéressant de comparer les résultats au meilleur portefeuille CRP log-optimal :

```
bcrp.res.1=rapt.bcrp.solve.QP(prs,lower=NULL,upper=NULL,gamma=1)
$twr 8.61977
$G 0.000730685
$G.year 1.20218
$volatility 0.563725
$sharpe 0.522215
$var
      10%      5%      1%
-0.0356215 -0.0496134 -0.0863773
$kurtosis 38.447
```

C'est une catastrophe, avec un Sharpe de 0.5 seulement ! Ce simple test montre bien la capacité de la méthode à exploiter des dépendances temporelles non triviales.

Rappelons que sur les futures les coûts sont quasi négligeables : exemple IB : 2 euros par contrat, soit $c = 2/35000 = 5.71e - 05$ et ce même si ajoute la fourchette de l'ordre de 1 point de base : soit $2e - 4$ En réalité, et encore, une fois, la bonne façon d'aborder les coûts n'est pas celle ci, mais d'introduire les zones de non trading autour des pondérations visées, permettant de réduire au minimum l'impact sans trop détériorer la stratégie.

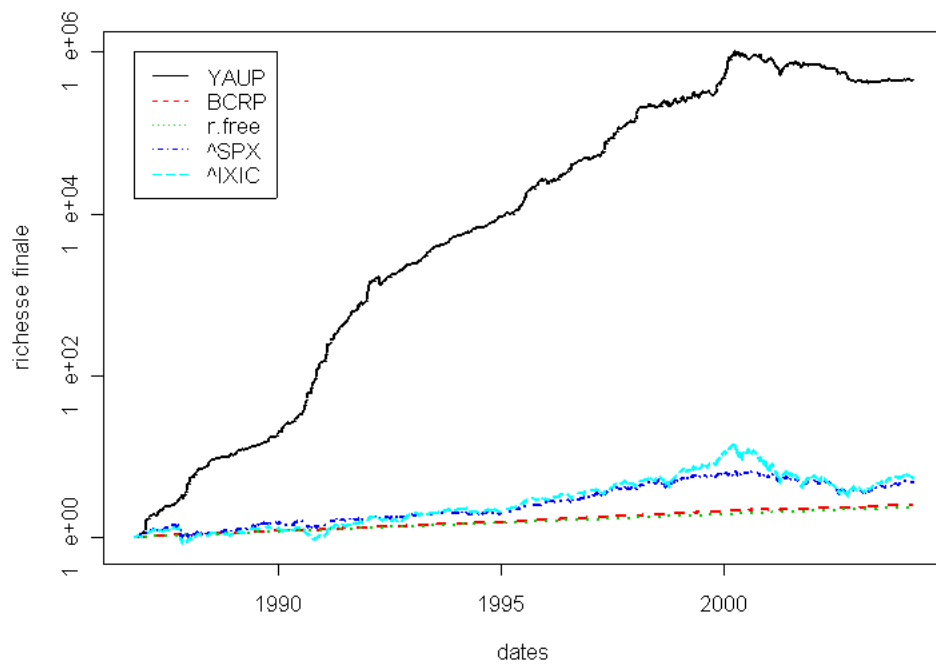
7.3.5 S&P et NASDAQ

La simulation pour le S&P et NASDAQ ne pose pas de problème d'asynchronisme. La simulation est effectuée sur 20 ans d'historique, depuis 1984.

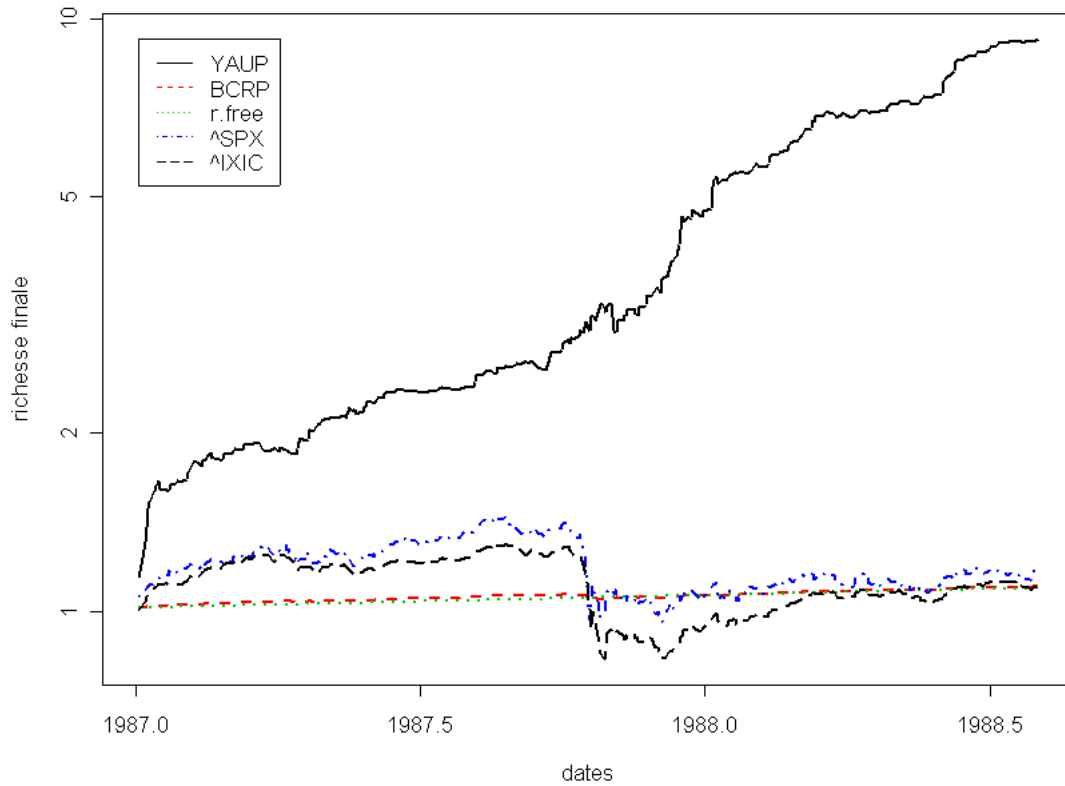
```
$twr 453768
$G 0.00295025
$G.year 2.10320
$volatility 0.261431
$sharpe 2.79087
$var
      10%      5%      1%
-0.0102868 -0.0183549 -0.0393244
```

```
$kurtosis 13.8262
$mdd 0.609493
res$ws.last
  r.free    ^SPX    ^IXIC
0.561522 -0.548629 0.987106
```

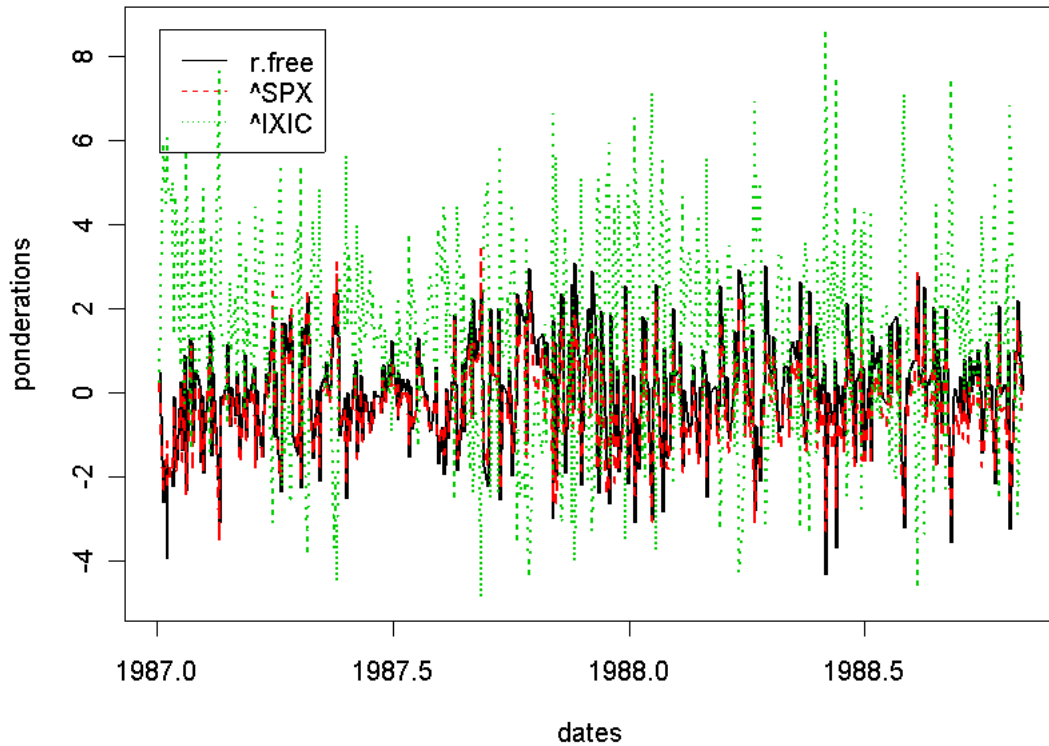
La encore de bons résultats ... d'autant que ces deux instruments peuvent se traiter sur les marchés à terme.



le portefeuille traverse le krach de 87 sans sourciller :



Les pondérations varient trop. Une meilleure prise en compte des coûts de transactions devraient modifier ce comportement.



Comparaison au meilleur CRP de même aversion :

```

"BCRP 30"
  r.free      ^SPX      ^IXIC
0.9405631 0.0298271 0.0296098
$twr 2.52273
$G 0.000209590
$G.year 1.05424
$volatility 0.0116843
$sharpe 0.350529
$var
      10%          5%          1%
-0.000603306 -0.001024786 -0.001786676
$kurtosis 11.1740

```

\$mdd 0.0187067

Ici encore, on voit l'avantage de l'exploitation des dépendances temporelles : le meilleur portefeuille CRP conduit à un portefeuille "long only", aux performances médiocres.

8 Conclusions

Ces conclusions font également référence à un document plus complet sur des tests "in sample" plus classiques dont nous livrons ici les principaux résultats.

Faisant l'hypothèse de rendements iid, la stratégie optimale est obtenue par un portefeuille à pondérations constantes, celles qui maximisent le taux de croissance. Nous avons vérifié que ce meilleur CRP (BCRP) existe bien.

Optimisation sans contrainte

En l'absence de contrainte sur la gestion (ventes à découvert et emprunts autorisés), le portefeuille logarithmique est le meilleur portefeuille possible au sens du taux de croissance. Cependant, sans aucune contrainte, le portefeuille logarithmique conduit à une exposition relativement risquée et les pertes historiques maximales peuvent être sévères.

Indépendamment des performances, et dans le cas sans contrainte, on constate une même structure de portefeuille :

- le portefeuille optimal sans contrainte est de type long/short,
- constitué par un portefeuille long only, très diversifié, quasiment toutes les actions participent de manière beaucoup plus équilibrée que dans le cas avec contrainte
- un portefeuille short only, principalement dans l'indice. Il n'y a quasiment pas d'actions en vente à découvert. En pratique, il suffira donc de se couvrir sur le marché à terme.
- dans le cas du portefeuille logarithmique, la pondération dans l'actif non risqué est souvent proche de 0.

Ces simples constatations soulèvent des interrogations :

- L'optimisation sans contrainte conduirait elle automatiquement à un portefeuille long/short ?
- Pourquoi le coté short est il sur l'indice ? et principalement sur l'indice ? on peut sans doute voir un début d'explication : le programme d'optimisation recherche un compromis entre rendements et risques, il trouve tout naturellement sur portefeuille avec une couverture sur l'indice. l'indice est également le plus proche sur la frontière efficiente, il suffit à couvrir l'ensemble des positions longues sur les actions.
- Lorsqu'on retire l'indice de l'univers, on obtient également un portefeuille long/short, mais beaucoup moins équilibré, avec une sur exposition sur le cote long, et peu de composantes short. Confirmant ainsi le rôle primordial de l'indice en tant que couverture dans les stratégies de Kelly long/short.

- Quelle relation avec la gestion indicielle ? Nous avons vu que les pondérations obtenues sont assez éloignées de celles qui minimisent l'erreur de tracking avec l'indice ...

Rôle de l'aversion au risque

Nous avons vu que le critère de Kelly conduit en général à des pertes historique sévères. Plutôt que d'utiliser le critère de Kelly, on pourra chercher à optimiser une fonction d'utilité en puissance, correspondant à une aversion relative aux risques plus élevée. On réduira d'autant l'exposition totale, les rendements et la volatilité, dans les mêmes proportions, sans toutefois altérer le ratio de Sharpe, propre à la stratégie. Dans le cas d'estimations, nous avons constaté qu'une stratégie log optimale de Kelly conduit en général à des résultats médiocres. Alors que les résultats sont acceptables avec une aversion plus élevée. Rappelons que si la stratégie de Kelly permet d'atteindre le meilleur taux de croissance, c'est aussi celle qui présente les drawdowns les plus importants et toute sur estimation de la pondération aggrave rapidement les pertes historiques. Il est donc préférable de sous estimer, plutôt que sur estimer, en utilisant, par exemple, une aversion au risque élevée.

Optimisation sous contrainte

Dans le cas de contraintes de gestion (ventes à découvert et emprunts non autorisés), le portefeuille BCRP est par construction même, meilleur que le meilleur actif, tout en étant moins risqué que la plupart des actifs, le portefeuille se trouvant pratiquement sur la frontière efficiente (a posteriori). La performance sera meilleure que tout portefeuille Buy & Hold, grâce à la gestion active induite par le "Rebalancing".

Cependant, comparé au cas sans contrainte, le portefeuille obtenu est beaucoup moins diversifié et la stratégie moins performante, non seulement en terme de performance, mais aussi en terme de ratio de Sharpe, perte maximale historique, ... avec contraintes, on obtient, au mieux, des ratios de sharpe de l'ordre de 1, alors que dans le cas sans contrainte les ratios de Sharpe sont souvent supérieurs à 3.

La solution sans contrainte étant la solution optimale, Il est tout à fait normal que la solution avec contraintes conduise à des taux de croissance moins bons.

On s'approchera d'autant plus de la solution optimale que l'on réduira les contraintes de gestion ...

L'approximation quadratique :

Dans tous les cas, avec ou sans contraintes, nous avons validé l'approximation par l'optimisation quadratique. Il est assez remarquable de voir la précision de cette approximation. Ceci revient à considérer l'hypothèse de rendements gaussiens comme valide car on néglige tous les moments d'ordre supérieur à 2. Même si les prix sont loin d'être gaussiens, les queues épaisses et autres faits stylisés n'auront finalement que peu d'impacts sur les pondérations optimales à rechercher ! dit autrement, une optimisation qui tiendrait compte des moments supérieurs est sans doute moins important que s'attacher à trouver la bonne pondération,

même sous des hypothèses simplificatrices.

Notons qu'en présence de l'indice, il peut y avoir multi colinéarité. Celle ci n'est pas gênante, même dans l'approximation quadratique, car on retrouve les même résultats que l'optimisation exacte, sans problème de stabilité particulier. Au contraire, nous avons montré que la présence de l'indice conduit, en général, à de bien meilleures caractéristiques du portefeuille optimal (Sharpe plus élevé).

Coûts de transactions :

les coûts de transactions peuvent réduire fortement l'effet bénéfique du rebalancing, finalement assez peu sensible à la fréquence d'ajustements. Nous sommes très loin d'un ajustement intraday!!! (à moins que la dynamique en intraday offre des opportunités de rebalancing en raison d'excès de volatilité qui ne seraient pas visibles en cotations journalières [34]). Force est de constater que les opérateurs ajustent sans doute plus qu'il est nécessaire, au grand plaisir des intermédiaires. Les gains (ou plutôt les économies) générés par un ajustement optimal peuvent être considérables (cf Leland [43]). D'ou l'importance de ce facteur dans les stratégies de gestion active.

Il conviendra donc de calculer les zones de non trading et d'éviter d'effectuer des réajustements trop fréquents.

Estimations :

Ces premières étapes ont permis de justifier des stratégies optimales du meilleur taux de croissance, en montrant qu'il existe un optimum régulier, que ces stratégies peuvent être approchées par une programmation quadratique.

Cette étude montre que l'on peut utiliser la programmation quadratique sous contrainte dans les calculs des portefeuilles universels de Cover et surtout Gyorfi/Lugosi, ce qui réduit sensiblement les temps de calculs.

Contrairement à Cover et Gyorfi/Lugosi, on se place directement dans le cas sans contrainte, conduisant à de bien meilleures solutions que dans le cas sous contraintes. Par ailleurs, le portefeuille optimal semble posséder une structure récurrente : un portefeuille long/short, long en actions et bien diversifié, short essentiellement sur l'indice. Structure que l'on pourra expliquer rapidement en remarquant que l'optimisation conduit tout naturellement à réduire les risque en plaçant l'indice en couverture.

On pourra également utiliser une aversion au risque plus élevée que celle du taux de croissance optimal, la choisir en fonction des objectifs de gestion, notamment en terme de perte maximale historique, tout en conservant un même ratio de Sharpe, propre à la stratégie et indépendant de l'aversion au risque.

YAUP

Enfin nous avons testé un nouvel algorithme, nommé YAUP, issu des portefeuilles universels

de Cover pour le coté universel et online, de Gyorf/Lugosi pour les estimations conditionnelles non paramétriques permettant d'exploiter des dépendances temporelles complexes, enfin de Cross/Barron pour l'extension au cas sans contrainte et les approximations quadratiques. L'algorithme est universel en garantissant que le taux de croissance converge vers le meilleur taux de croissance ex post, pour de très larges classes de distributions des prix (il suffit que les rendements journaliers restent bornés).

La méthode a été testée sur un univers comprenant les 30 actions de l'indice Dow Jones et l'indice lui même, Le portefeuille ainsi obtenu bat le meilleur CRP à posteriori (BCRP), conduisant à une même structure long/short, quasi dollar neutre avec une aversion au risque de 30 et des performances (capital multiplié par plus de 1000), un ratio de Sharpe de 2.8, et un maximum drawdown de 14%, le portefeuille obtenu est en tout point supérieur au meilleur portefeuille à pondérations constantes à posteriori pour la même aversion au risque!

Les tests sur les indices mettent en évidence la capacité à exploiter dépendances temporelles non triviales : le portefeuille obtenu possède à nouveau une structure long/short, ses caractéristiques sont en tout point largement supérieures au meilleur portefeuille ex post sous hypothèses iid conduisant à un portefeuille "long only", aux performances médiocres.

Enfin, il conviendra de compléter cette étude par une meilleure prise en compte des coûts de transaction en intégrant ce paramètre au coeur même des estimations. Sans prise en compte des coûts de transaction, les taux de rotation sont trop élevés sur l'univers des actions. En revanche, sur les futures, les taux de rotation peuvent être beaucoup plus élevés, en raison, d'une part des faibles coûts de transactions, d'autre part des leviers intrinsèques à ces instruments (par exemple, une rotation de 100% sur un contrat future CAC40, ne représente que l'achat ou la vente d'un contrat de plus ou de moins, sur un portefeuille de 30 000 euros, avec un CAC40 à 3000 points)

9 References

- [1] ALEXANDER, C & DIMITRIU, A. "*Cointegration-based trading strategies : A new approach to enhanced index tracking and statistical arbitrage*", 2002. ... Discussion Paper 2002-08, ISMA Centre Discussion Papers in Finance Series.
- [2] AKCOGLU, K. & DRINEAS, P. & KAO, M.-Y. "*Fast Universalization of Investment Strategies with Provably Good Relative Returns*", 2002. ...

-
- [3] AURELL & MURATORE-GINANNESCHI, P. "*Financial Friction and Multiplicative Markov Market Games*" . cond-mat/9908253, 1999. ...
- [4] AIT-SAHALIA, Y & BRANDT, M. "*Variable Selection for Portfolio Choice*" , 2001. ...
- [5] AVELLANEDA, M. "*cours et publications*"
- [6] BAVIERA, R. & AURELL, E. & HAMMARLID, O. & SERVA, M. & VULPIANI, A. "*Growth Optimal Investment and Pricing of Derivatives*" . Physica A 280 (2000) 505-521, 2000. ...
- [7] BAVIERA, R. "*Thesis*" , 2000. ...
- [8] BLUME, L & EASLEY, D. "*Evolution and Market Behavior*". Journal of Economic Theory, 58 :9-40, 1990.
- [9] BORODIN, A. & EL-YANIV, R. & GOGAN, V. "*On the Competitive Theory and Practice of Portfolio Selection*" . In Latin American Theoretical Informatics, pages 173-196, 2000. ...
- [10] BORODIN, A. & EL-YANIV, R. & GOGAN, V. "*Can We Learn to Beat the Best Stock*" . Neural Information Processing Systems (NIPS), 2003., 2003. ...
- [11] BLUM & KALAI. "*Universal Portfolios with and without Transaction Costs*" . In COLT - Proceedings of the Workshop on Computational Learning Theory, Morgan Kaufmann Publishers, 1997. ...
- [12] BLAEDEL, M & LANDO, D. "*On The Long Run Portfolio Optimization Using Universal Portfolios*" . 1998. ...
- [13] BLOK, H. J. "*Modelling Intentionality : The Gambler*" . November 1998.
- [14] BLOK, H. J. "*On the nature of the stock market : Simulations and experiments*" . PhD thesis, University of British Columbia, 2000. ...
- [15] BOUCHAUD, J.-P. & MATA CZ, A. & POTTERS, M. "*Leverage Effect in Financial Markets - The Retarded Volatility Model*" . PHYSICAL REVIEW LETTERS, 2001. ...
- [16] BOUCHAUD, J. P & POTTERS, M. "*Theory of Financial Risks*" . Cambridge University Press, 2000.
- [17] BIELECKI, T. R. & PLISKA, S. R. & SHERRIS, M. "*Risk sensitive asset allocation*" . Journal of Economic Dynamics and Control, 2000. ...
- [18] BREIMAN, L. "*Optimal Gambling Systems for Favorable Games*" . 1961. ...
- [19] BOULIER, J. F & TAILLARD, G. "*Dynamic Allocation and Risk Control Retirement Accumulation Plans*". 2000.

-
- [20] CROSS, J. E & BARRON, A. R. "*Efficient Universal Portfolios for Past-Dependent Target Classes*". Mathematical Finance, 2003. ...
- [21] COVER, T & ORDENTLICH, E. "*Universal Portfolios with Side Information*". IEEE Transactions on Information Theory, 42(2), March 1996. ...
- [22] COVER, T. "*Web site*".
- [23] COVER, T. "*An Algorithm for Maximizing Expected Log Investment Return*". IEEE Transactions On Information Theory, vol. it-30, no. 2, March 1984. ...
- [24] COVER, T. "*Universal Portfolios*". 1996. ...
- [25] CALDARELLI, G. & SCIUBBA, E. & PICCIONI, M. "*A Numerical Study On The Evolution Of Portfolio Rules*". 2000. ...
- [26] DEMANGE, G & ROCHET, J.-C. "*Méthodes Mathématiques de la Finance*". Economica, 1992.
- [27] EVSTIGNEEV, I. & HENS, T. & SCHENKHOPPÉ, K. R. "*Evolutionary Stable Stock Markets*". October 2003. ...
- [28] FARMER, J. "*Market Force, Ecology, and Evolution*", 1998. ...
- [29] FERNHOLZ, R. "*Stochastic Portfolio Theory*". Springer-Verlag, 2002. ...
- [30] GRINOLD, R. C & KAHN, R. N. "*Active Portfolio Management*". McGraw-Hill, 1999.
- [31] GYORFI, L & O LUGOSI. "*Nonparametric kernel-based sequential investment strategies*", 2003. ...
- [32] GROSSMAN, S. J & ZHOU, Z. "*Optimal Investment Strategies for Controlling Drawdowns*". Mathematical Finance, 1993.
- [33] HERLEMONT, D. "*YATS-RAPT for Realtime Automated Profitable Trading*".
- [34] HERLEMONT, D. "*Marchés à Terme Intraday : Faits Stylisés*", 2004. ...
- [35] HELMBOLD, D. P. & SCHAPIRE, R. E. & SINGER, Y. & WARMUTH, M. K. "*On-Line Portfolio Selection Using Multiplicative Updates*". In International Conference on Machine Learning, pages 243–251, 1996. ...
- [36] ISHIJIMA, H. "*Numerical Methods for Universal Portfolios*", 2001. ...
- [37] IYENGAR, G. "*Universal investment in markets with transaction costs*", 2004. ...
- [38] JACOBS, B. I. & STARER, D. L. & KENNETH, N. "*Long-Short Portfolio Management : An Integrated Approach*". THE JOURNAL OF PORTFOLIO MANAGEMENT, Winter 1999, Volume 25, Number 2, Pages 23 - 32. ...

-
- [39] KARGIN, V. "*Optimal Convergence Trading*" , 2004. ...
- [40] KELLY, J. "*A New Interpretation of Information Rate*" . Bell System Technical Journal 35, 917-925, 1956. ...
- [41] KALAI, A & VEMPALA, S. "*Efficient Algorithms for Online Decision Problems*"
- [42] KALAI, A & VEMPALA, S. "*Efficient algorithms for universal portfolios*" . J. Mach. Learn. Res., 3 :423–440, 2003. ...
- [43] LELAND, H. E. "*Optimal Portfolio Management with Transactions Costs and Capital Gains Taxes*" , 1999. ...
- [44] LO, A. W & MACKINLAY, A. C. "*When Are Contrarian Profits Due to Stock Market Overreaction?*". Review of Financial Studies, 3(2) :175–205, 1990.
- [45] LO, A. W & MACKINLAY, A. C. "*A Non-Random Walk Down Wall Street*" . Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.
- [46] LONGIN, F & SOLNIK, B. "*Extreme Correlation of International Equity Markets*". Journal of Finance, pages 651–678, 2001.
- [47] MITCHELL, J. E & BRAUN, S. "*Rebalancing an Investment Portfolio in the Presence of Transaction Costs*" . 2002. ...
- [48] MERTON, R. C. "*Continuous Time Finance*" . Basil Blackwell, Cambridge, MA, 1992.
- [49] MAGDON-ISMAIL, M. & ATIYA, A. F. & PRATAP, A. & ABU-MOSTAFA, Y. S. "*On the Maximum Drawdown of a Brownian Motion*" , 2003. ...
- [50] MARSILI, M. & MASLOV, S. & ZHANG, Y.-C. "*Dynamical optimization theory of a diversified portfolio*" . 1998. ...
- [51] MERTON, R & SAMUELSON, P. "*Fallacy of the lognormal approximation to optimal portfolio decision making over many periods*". J. of Financial Economics, vol 1. 67–94, 1974.
- [52] MACLEAN, L. & SANEGRE, R. & ZHAO, Y. & ZIEMBA, W. T. "*Capital Growth with Security*" , 2002. ...
- [53] MASLOV, S & ZHANG, Y.-C. "*Optimal investment strategy for risky assets*" . Scientific Publishing Company, Singapore, 1998. ...
- [54] MASLOV, S & ZHANG, Y.-C. "*Probability distribution of drawdowns in risky investments*" . Scientific Publishing Company, Singapore, 1998. ...

-
- [55] PARKES, D. C. "*Multiagent Cooperative Search for Portfolio Selection*" . Games and Economic Behavior, 35 :124-165, 2001. ...
- [56] PLISKA, S. R & SUZUKI, K. "*Optimal tracking for asset allocation with fixed and proportional transaction costs*" . Quantitative Finance, 1998. ...
- [57] RUBINSTEIN, M. "*Continuously Rebalanced Investment Strategies*" . Journal of Portfolio Management, 1991. ...
- [58] SCHAFER, D. "*Nonparametric estimation of log-optimal portfolio selection functions in return processes without mixing*" , 2001. ...
- [59] SCIUBBA, E. "*The Evolution of Portfolio Rules and the Capital Asset Pricing Model*" , 1998. ...
- [60] SHILLER, R. J. "*Do Stock Prices Move Too Much to be Justified by Subsequent Changes in Dividends ?*". American Economic Review, 71 :421-498, 1981.
- [61] SHILLER, R. J. "*Irrational exuberance*" . Princeton University Press, 2000.
- [62] SINGER, Y. "*Switching Portfolios*" , 1999. ...
- [63] SORNETTE, D. "*Large Deviations and Portfolio Optimization*" . Working paper, 1998. ...
- [64] STANTON, R. "*A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk*" , 1998. ...
- [65] THORP, E. O. "*Beat the Dealer*" . Vintage Books USA, 1966.
- [66] THORP, E. O. "*The Kelly criterion in Blackjack, sports betting, and the stock market*" . 10th int. conf. Gambling and Risk Taking, 1997. ...
- [67] VINCE, R. "*Portfolio Management Formula : Mathematical Trading Methods for the Futures, Options and Stock Markets*" . 1990.
- [68] VERGNI, D & VULPIANI, A. "*Transaction costs - a new point of view*". Int. J. of Theoretical and Applied Finance to appear, 2000. ...
- [69] ZIEMBA, W. T. "*The Stochastic Programming Approach to Asset, Liability and Wealth Management*" . AIMR Publisher, 2003. ...
- [70] ZHAO, Y & ZIEMBA, W. T. "*Mean-Variance versus Expected Utility in Dynamic Investment Analysis*" , 2002. ...